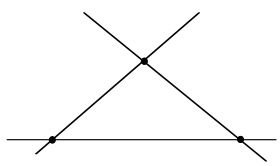
Apêndice B: Resolução dos Exercícios Propostos

Se você imprimir este arquivo, é importante que olhe para a resolução somente após ter tentado resolvê-los. De fato, para que ocorra a aprendizagem é importante que tente fazer sozinho os exercícios. Utilize estas resoluções apenas como uma maneira de ter certeza de que sua solução está correta. Se mesmo após a conferência da resolução houver alguma dúvida procure a ajuda do professor pois muitos exercícios podem ter outras formas de resolução.

Capítulo 2

2.1. Pela Proposição 2.2, duas retas se encontram no máximo uma vez. No caso de três retas, duas se encontram uma vez e a terceira encontra as outras duas no máximo em dois pontos totalizando no máximo três interseções. No caso de quatro retas, além dos três pontos de interseção já obtidos com as três primeiras retas, podemos ter a quarta reta encontrando as outras três em mais três pontos, ou seja, $(1 + 2 + 3)$ totalizando 6 pontos. No caso de cinco retas, além dos seis pontos obtidos por quatro retas, a quinta poderá encontrar as outras quatro no máximo em quatro pontos, ou seja, $(1+2+3+4)$ totalizando 10 pontos de interseção no máximo. Generalizando temos que n retas se encontram em no máximo $[1+2+3+...+(n - 1)]$ pontos, que por indução finita prova-se que é igual a $\frac{n.(n-1)}{2}$ pontos.

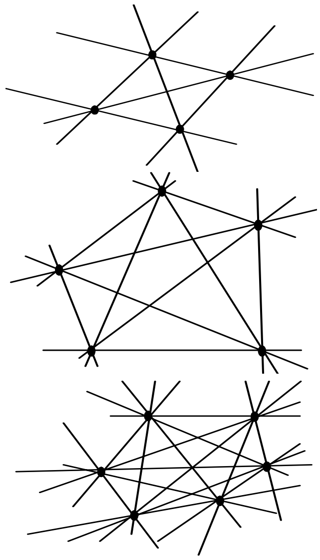


2.2. Para três pontos não colineares temos três retas, como podemos observar no desenho ao lado. Para quatro pontos, sendo quaisquer três deles não colineares temos 6 retas pois três pontos determinam três retas e o quarto ponto determinam mais três retas. De maneira análoga, para o caso de cinco pontos temos dez retas determinadas por eles, pois são seis retas obtidas por quatro pontos mais quatro retas determinadas pelo quinto ponto. Assim, para o caso de seis pontos teremos 10+5=15 retas determinadas por eles. Para o caso geral de n pontos teremos a somatória

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n,$$

que por indução finita prova-se que é igual a $(n^2 - n)/2$ retas. Esta quantidade pode ser obtida através da combinação de n pontos tomados dois a dois. Logo,

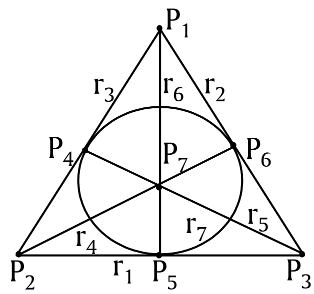
$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n^2 - n}{2}\,.$$



2.3. No primeiro caso em questão vale o Axioma I.2, pois dados dois pontos quaisquer do plano existe uma única reta que os contêm. De fato, dados os pontos a e b, tomamos a reta $r_1 = \{a, b\}$, para os pontos a e c, tomamos a reta $r_2 = \{a, c\}$ e para os pontos b e c, tomamos a reta $r_3 = \{b, c\}$. O segundo caso, é análogo, dados quaisquer dois pontos de P existe uma única reta que os contém, basta observar que todas as combinações possíveis entre os nove pontos do plano P, tomados dois a dois pertence a uma das doze retas dessa geometria.

2.4. Nomeando os pontos e as retas do plano dado obtemos o desenho ao lado:

- Satisfaz o Axioma I.1(a) pois temos 7 pontos.
- Satisfaz o Axioma I.1(b) pois temos 7 retas e cada reta possui 3 pontos pertencentes a ela e 4 pontos não pertencentes.



- Satisfaz o Axioma I.2 pois por dois pontos passa uma única reta.

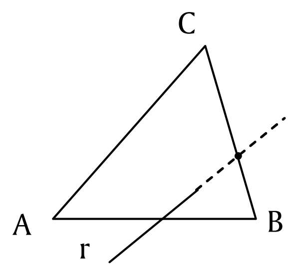
2.5. Seja $\mathfrak{I} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ o conjunto de seis pontos da geometria dada. Na reta $r = P_1P_2$ existe $Q_1 \in \mathfrak{I} \setminus \{P_1, P_2\}$, por hipótese.

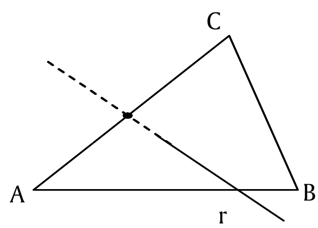
Seja $Q_2 \in (\Im \setminus \{P_1, P_2\}) \setminus \{Q_1\}$. Também, por hipótese, temos $Q_2 \notin r$., pois r já possui 3 pontos. Logo, existe a reta $s = P_1Q_2$ que contém um ponto $Q_3 \in (\Im \setminus \{P_1, P_2\}) \setminus \{Q_1, Q_2\}$. Note que $Q_3 \notin r$. Seja $Q_4 \in (\Im \setminus \{P_1, P_2\}) \setminus \{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Novamente, por hipótese $Q_4 \notin r \cup s$ pois ambas já possuem 3 pontos. Considere a reta $t = P_1Q_4$ que contém um terceiro ponto Q_5. Temos $Q_5 \neq P_1$ e $Q_5 \neq Q_4$ e, por construção, $Q_5 \neq Q_1$ e $Q_5 \neq P_2$, pois $r \neq t$, $Q_5 \neq Q_2$ e $Q_5 \neq Q_3$, pois $s \neq t$. Isto nos leva a uma contradição pois Q_5 seria o sétimo ponto da geometria dada.

2.6. Como $\{S, S', \{O\}\}$ é uma partição de r , esta partição induz uma relação de equivalência em r dada por: A está relacionado com B se, e somente se ($A, B \in S$) ou ($A, B \in S'$) ou ($A= B =O$), que é exatamente a condição de estar do mesmo lado em relação ao ponto O.

2.7. Como $\{\Pi, \Pi', \{O\}\}$ é uma partição do plano , esta partição induz uma relação de equivalência no plano dada por: A está relacionado com B se, e somente se (A e $B \in \Pi$) ou (A e $B \in \Pi'$) ou ($A= B =O$), que é exatamente a condição de estar do mesmo lado em relação à reta r.

2.8. Consideremos o triângulo ABC e a reta r. Suponhamos que r intercepta o lado AB, não passa pelos vértices A, B ou C, devemos mostrar que r também intercepta o lado AC ou o lado BC. De fato, se r intercepta AB então A e B estão em lados contrários em relação a r. Como por hipótese r não passa por C, devemos ter que C está do mesmo lado que A em relação a r ou que C está no lado contrário a A em relação a r. Se C está do mesmo lado de A, e como A está em lado contrário em relação a B, então C também está no lado contrário a B, logo r intercepta o segmento BC. Se C está no lado contrário a A em relação à r, então por definição, r intercepta AC, como queríamos demonstrar. Para o caso de interceptar AC ou BC a demonstração é análoga.





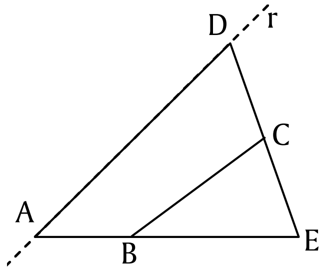
2.9. É claro que do Axioma I.2, A, B, C e D são colineares. Suponhamos que B não esteja entre A e D daí, temos dois casos:

- A está entre B e D. Neste caso, como C está entre A e D, temos que C e D está do mesmo lado em relação a A, portanto B e C estão em lados contrários em relação a A e daí A está entre B e C, o que é absurdo por hipótese.
- D está entre A e B. Como C está entre A e D, temos que A e C estão do mesmo lado em relação a D. Assim, C e B estão em lados contrários em relação a D e portanto C está entre A e B, o que é absurdo por hipótese, posto que B está entre A e C.
Dessa forma B está entre A e D.

Suponhamos agora, que C não se encontra entre B e D. Temos dois casos:
- D está entre B e C. Neste caso, como B está entre A e D, temos que A e B estão do mesmo lado em relação a D. Portanto, A e C estão em lados contrários em relação a D e daí D está entre A e C, o que é absurdo, por hipótese.
- B está entre C e D. Aqui, como B está entre A e D, temos que B e D estão do mesmo lado em relação a A. Assim, C e D estão em lados contrários em relação a A e portanto, A está entre C e D, o que é absurdo.
Logo, devemos ter C entre B e D.

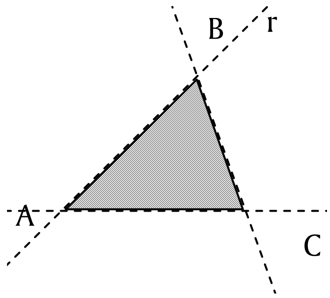
2.10. Temos por construção $B \notin AD$ e que $C \notin AD$, logo como AD e BC são retas distintas e como B e C estão no mesmo semiplano em relação a reta AD pela Definição 2.8 temos que BC não intercepta AD.

2.11. Para mostrar que a ordem é estrita devemos mostrar que é irreflexiva e transitiva:
i) Seja A pertencente a primeira semi-reta. Inicialmente mostremos que A não é menor do que A. De fato, se fosse $A < A$, então A precede A na primeira semi-reta, daí pela Definição 2.10 A está entre A e O, o que é absurdo. Se A pertence a segunda semi-reta, da mesma forma, A não é menor do que A.
ii) Se $A < B$ e $B < C$, então $A \leq B$ e $B \leq C$. Assim, pela primeira parte da Proposição 2.12 (caso $\leq$) temos $A \leq C$. Mostremos que $A < C$. De fato, se fosse $A = C$, então teríamos $C < B$ e $B < C$, o que não pode ocorrer. Logo $A < C$.



2.12. a) Basta observar que AB e CD não se interceptam pois estão contidos nos lados DE e AE do triângulo ADE. Temos também que AD e BC não se interceptam pois B e C pertencem ao interior de AE e DE, respectivamente.
b) Quadriláteros não convexos (Exercício 2.17) não podem ser construídos por este método.

2.13. Para a primeira pergunta temos que sim, pois a interseção de dois segmentos pode ser um segmento. Para a segunda pergunta a resposta é não pois, pelo Axioma II.2, sempre existe um outro ponto entre dois pontos quaisquer que também pertenceriam aos segmentos.



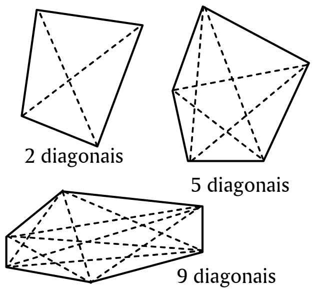
2.14. Seja ABC um triângulo, o interior do triângulo é a região dada pela interseção dos semiplanos $\Pi_{AC,B}$, $\Pi_{BC,A}$, $\Pi_{AB,C}$.

2.15. Suponhamos que existam n retas r_1, r_2, ..., r_n. Seja r_i uma das retas onde $1 \leq i \leq n$ e P um ponto em r_i não pertencente a nenhuma das outras retas. Pelo item b) do Axioma II.2 existem pontos que não pertencem a r_i . Seja P' um destes pontos. Temos que a reta PP' que não é nenhuma das retas dadas pois por construção P não pertence a nenhuma delas, o que contradiz o fato de existir somente n retas, com n qualquer.

2.16. Seja P um ponto qualquer e r uma reta dados pelo Axioma I.1. Se $P \in r$ considere $P' \notin r$. Pelo Corolário 2.14 temos que existem infinitos pontos em r. Logo, pelo Axioma I.2, podemos considerar as retas r_{PX}, no caso de $P \notin r$, ou as retas $r_{P'X}$, no caso de $P \in r$, onde $X \in r$. Assim, teremos infinitas retas passando por P.

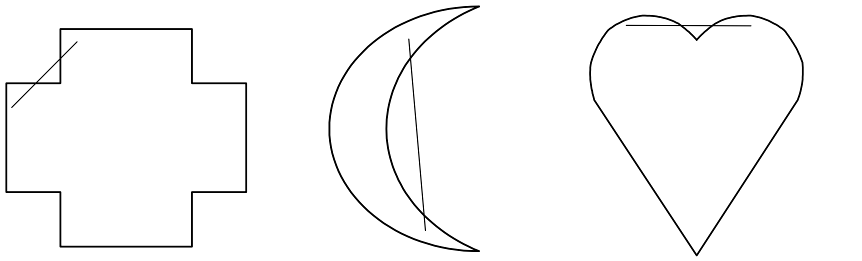
2.17. De cada vértice do polígono podemos desenhar n – 3 diagonais correspondentes aos vértices possíveis de se obter uma diagonal. Seguindo este critério as diagonais serão desenhadas duas vezes, logo teremos

$$\frac{n.(n-3)}{2} \text{ diagonais.}$$



2.18. a) Como qualquer segmento com extremos no plano estão, por definição, no plano, temos que o plano é convexo. O semiplano é convexo, trivialmente pela sua definição.

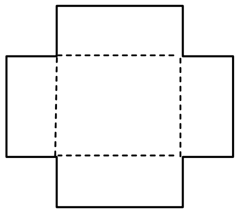
b) O segundo e quarto são desenhos representando figuras convexas pois qualquer segmento ligando pontos do conjunto está totalmente contido na figura. O primeiro, terceiro e quinto desenho representam figuras que não são convexas, conforme se pode observar os segmentos não inteiramente contidos na figura (veja desenho abaixo).



c) Sejam A e B dois pontos pertencentes a interseção de n conjuntos convexos, então A e B pertencem a cada um dos conjuntos convexos. Logo, o segmento AB pertence a cada um destes conjuntos, pois são convexos. Portanto o segmento AB pertence a interseção, concluindo assim que a interseção é um conjunto convexo.

d) Como os semiplanos são convexos, pelo item c) temos o desejado.

e) Nem sempre ocorre que a união de dois conjuntos convexos seja também convexa. De fato, considere a figura representada pelo desenho ao lado, ela é a união de cinco quadriláteros convexos e já vimos que ela não é convexa.



2.19. Seja ABC um triângulo, uma região é a interseção dos semiplanos $\Pi_{AC,B}$, $\Pi_{BC,A}$ e $\Pi_{AB,C}$, a outra é o plano menos a interseção. Como a interseção de três semiplanos é um conjunto convexo, temos que uma das regiões é convexa, a saber o interior do triângulo ABC. A outra região não é convexa pois se tomarmos dois pontos C e D em lados distintos e considerarmos um segmento AB que contém CD, teremos o segmento CD pertencente ao interior do triângulo que não está na região.

2.20. a) Falsa, pois ponto é uma noção primitiva e, portanto, não se define.
b) Falsa, pelo mesmo motivo do item a).
c) Falsa, pois eles podem ser coincidentes. Deve-se dizer dois pontos distintos.
d) Verdadeiro, pois se não fossem distintos haveria somente dois pontos e estes seriam colineares.
e) Falsa, elas podem ser coincidentes. Deve-se dizer "um único ponto em comum".

Capítulo 3

3.1. a) Sendo x: r → IR um sistema de coordenadas para a reta r, temos, pelo Teorema 3.3, $|x(M) - x(N)| = \overline{MN} = 7$. Como x(M) < x(N) temos, pela definição de módulo, $|x(M) - x(N)| = x(N) - x(M) = x(N) - 3$. Logo, $x(N) - 3 = 7$ e, portanto, $x(N) = 10$. Vamos determinar agora x(P), como $x(N)=10$ e $\overline{NP} = |x(P) - x(N)| = 9$, pelo Teorema 3.3, devemos ter $x(P)=19$ ou $x(P)=1$. Como $\overline{MP} = |x(P) - x(M)| = 2$ e $x(M)=3$ então $x(P)=1$ ou $x(P)=5$. Portanto, para satisfazer as duas condições, devemos ter $x(P)=1$.

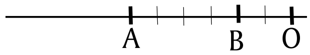
b) Neste caso temos $|x(M) - x(N)| = x(M) - x(N) = 3 - x(N)$. Logo, $x(N) = -4$. Para, determinarmos x(P), observamos que $x(N) = -4$ e $\overline{NP} = |x(P) - x(N)| = 9$, assim devemos ter $x(P)=5$ ou $x(P) = -13$. Como $\overline{MP} = |x(P) - x(M)| = 2$ e $x(M)=3$ então $x(P)=5$ ou $x(P)=1$. Portanto, para satisfazer as duas condições, devemos ter $x(P)=5$.

3.2. Sim, pois pelo Axioma II.1, dados três pontos colineares, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois. Assim, temos três casos a considerar:

1. N está entre M e P: neste caso temos $\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$, o que não é verdadeiro.
2. M está entre N e P: neste caso temos $\overline{NP} = \overline{MN} + \overline{MP}$, o que também não é verdadeiro.
3. P está entre M e N: como os outros casos não podem ocorrer resta somente este.

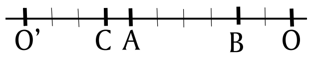
Logo P está entre M e N.

3.3. Como os pontos A e B são fixos e no sistema I a coordenada de A é –6 e a de B é –2, temos que O dista de A 6 unidades e de B 2 unidades que, por convenção, vamos supor à direita, como no desenho ao lado. Como no sistema

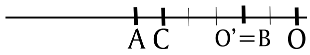


II, a coordenada de A é –4 e a unidade é a mesma que no sistema I, temos que O' dista de A quatro unidades e neste caso podemos ter duas situações:

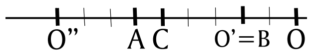
- O' está à esquerda de A: Neste caso C está à esquerda de A, pois dista –3 de O';



- O' está à direita de A e, portanto O'= B e C está à direita de A.

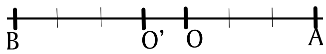


Mas como no sistema III, as coordenadas de C e B são 4 e 7, respectivamente, temos $\overline{BC} = 3$ e a única possibilidade é B = O'. Como $\overline{AC} = 1$ ficamos com o terceiro desenho ao lado.



Logo, C está entre A e B e as coordenadas de O' é –2 e de O" é –9 no sistema I. Como x"(B) = 7 e x"(C) = 4 devemos ter O" à esquerda de O.

3.4. O ponto O divide r em duas semi-retas $S_{OO'}$ e a semi-reta que não contém O'.



Chamamos $S_{OO'}$ de semi-reta negativa e a outra semi-reta de positiva. Temos x(O)=0, x(O')=–1 e x(A)=3. Portanto, A dista de O três unidades na semi-reta oposta a $S_{OO'}$. Vamos chamar de x' a coordenada de um ponto no 2º sistema. Vamos adotar como positiva a semi-reta $S_{O'O}$ e negativa a outra semi-reta nesse sistema. Assim por hipótese x'(B)= –3, logo B dista de O' três unidades mas na semi-reta oposta a $S_{O'O}$. Assim teremos x'(0)=1; pois O dista de O' uma unidade da semi-reta positiva, x'(A)=4 pois $\overline{O'A} = \overline{O'O} + \overline{OA}$ e A está em $S_{O'O}$. Finalmente x(B)= –4 pois B está na semi-reta $S_{OO'}$ adotada como negativa e $\overline{OB} = \overline{OO'} + \overline{O'B}$.

3.5. Por definição de ponto médio, temos

- $x(C) = \dfrac{x(A)+x(B)}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = 1$
- $x(D) = \dfrac{x(A)+x(C)}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$
- $x(E) = \dfrac{x(B)+x(C)}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3$

Seja F o ponto médio de DE, então $x(F) = \dfrac{x(D) + x(E)}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$. Como só existe um ponto de coordenada 1, de acordo com o Corolário 3.5, temos que F = C.

3.6. Na reta r que passa por AB podemos considerar um sistema de coordenadas x tal que A está entre O e B onde x(A) < x(B). Neste sistema considere C um ponto tal que $x(C) = \dfrac{x(A) + kx(B)}{1+k}$ que é único pelo Corolário 3.5. Como x(A) < x(B) e (1+k)x(C) = x(A) + kx(B), temos x(A) < x(C) < x(B). Pela Proposição 3.6, C entre A e B e além disso, temos

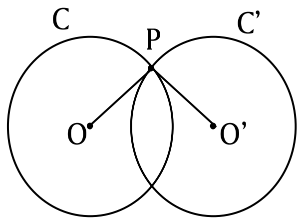
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \left|\frac{x(C) - x(A)}{x(C) - x(B)}\right| = k,$$

como queríamos.

3.7. Como $\overline{AE} = \overline{EK}$, pela Definição 3.7, temos que E é o ponto médio do segmento AK, assim

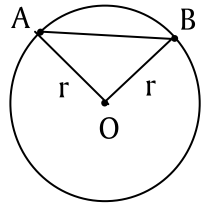
$$x(E) = \frac{x(A) + x(K)}{2} = \frac{\sqrt{2} + (-\sqrt{18})}{2} = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\,.$$

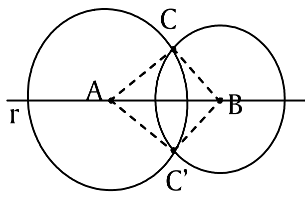
3.8. Sejam C e C' duas circunferências de raio r e centros O e O', respectivamente. Como, por hipótese, P ∈ C, temos $\overline{OP} = r$. Temos também, por hipótese, P ∈ C', logo $\overline{PO'} = r$. Portanto, $\overline{PO} = r = \overline{PO'}$.



3.9. O triângulo OAB, sempre será isósceles, pois AO e OB tem medidas iguais a r. Se o triângulo for eqüilátero teremos

$$\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r\,.$$



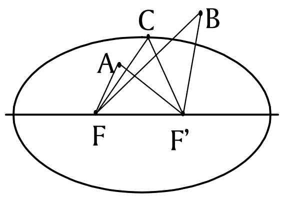


3.10. a) A régua não graduada está associada ao Axioma I.2 e o compasso está associado ao Axioma III.1.

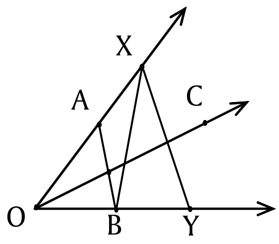
b) - Triângulo Escaleno: Suponhamos que queremos desenhar um triângulo ABC. Em uma reta qualquer construímos um segmento cujo comprimento é um dos lados do triângulo e seus extremos são dois vértices do triângulo desejado. Com centro em um dos extremos do segmento construímos uma circunferência de raio igual a um segundo lado do triângulo e com centro no outro extremo do segmento construímos uma circunferência com raio igual ao terceiro lado do triângulo. A interseção dessas duas circunferências nos dá o terceiro vértice do triângulo. Notemos que o problema pode ter duas soluções: dois triângulso escaleno, um em cada semiplano determinado por r.

- **Triângulo Isósceles** e **Eqüilátero**: A construção é análoga ao item b), apenas observando que, para facilitar, no triângulo isósceles começamos com a base, e tomamos o raio das circunferências iguais aos lados. No triângulo eqüilátero temos os raios das circunferências iguais a medida da base.

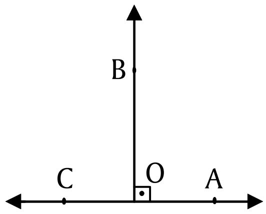
- Para construir o **quadrilátero** de lados congruentes, obtenha dois triângulos isósceles sobre uma mesma base.



3.11. Analogamente a circunferência os pontos exteriores são os pontos X tais que $\overline{XF}+\overline{XF'}>d$ e os pontos interiores são os pontos A tais que $\overline{XF}+\overline{XF'}<d$. No desenho ao lado, o ponto A é interior a elipse e o ponto B é exterior a elipse.



3.12. Seja $X \in S_{OA}$. Consideremos o triângulo ABX. Como S_{OC} intercepta o lado AB por hipótese e não passa por nenhum de seus vértices então, pelo Exercício 2.7, S_{OC} intercepta o lado BX ou AX. Note que S_{OC} não intercepta o lado AX, pois se fosse o caso, S_{OA} e S_{OC} teriam dois pontos em comum, portanto seriam coincidentes pelo Axioma I.2. Assim S_{OC} intercepta BX. Tomemos $Y \in S_{OB}$ e consideremos o triângulo BXY. Como S_{OC} intercepta o lado BX, pelo Exercício 2.7, S_{OC} intercepta o lado XY ou o lado BY. Observe que S_{OC} não intercepta BY, pois se esse fosse o caso, S_{OC} e S_{OB} teriam dois pontos em comum, portanto coincidentes pelo Axioma I.2, o que contradiz a hipótese. Logo S_{OC} intercepta XY. Como $X \in S_{OA}$ e $Y \in S_{OB}$ são quaisquer, temos o desejado.



3.13. De fato, sabemos por definição, que o suplemento do ângulo AÔB é o ângulo obtido prolongando um de seus lados, isto é, o suplemento do ângulo AÔB é o ângulo BÔC, onde C pertence a semi-reta oposta a S_{OA}. Como AÔC é um ângulo raso e S_{OB} divide
o ângulo AÔC, temos

$$m(A\hat{O}B)+m(B\hat{O}C) = 180^o,$$

mas como $m(A\hat{O}B) = m(B\hat{O}C)$, temos

$$m(A\hat{O}B)+m(A\hat{O}B) = 180^o \Rightarrow 2\, m(A\hat{O}B) = 180^o \Rightarrow m(A\hat{O}B) = 90^o.$$

Logo, o ângulo AÔB é reto.

3.14. De fato, dado um ângulo AÔB, considere o seu suplemento BÔC, onde S_{OC} é a semi-reta oposta a S_{OA}. Sejam S_{OD} e S_{OE} as bissetrizes de AÔB e BÔC, respectivamente. Assim, temos

$$m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}D) + m(D\hat{O}B) = 2\, m(D\hat{O}B)$$

e

$$m(B\hat{O}C) = m(B\hat{O}E) + m(E\hat{O}C) = 2\, m(B\hat{O}E).$$

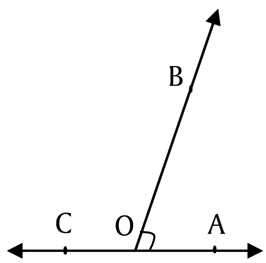
Temos também que S_{OB} divide o ângulo DÔE, por construção. Logo,

$$m(D\hat{O}E) = m(D\hat{O}B) + m(B\hat{O}E) = \frac{1}{2}\, m(A\hat{O}B) + \frac{1}{2}\, m(B\hat{O}C) =$$

$$= \frac{1}{2}.[m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C)] = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ.$$

3.15. Sejam AÔC e BÔC ângulos tais que m(AÔC) = 180º e m(AÔB) < 90º. Se BÔC é suplemento de AÔB, devemos mostrar que m(BÔC) > 90º. Como, por hipótese, temos m(AÔB) < 90º, existe um número real positivo não nulo tal que

$$m(A\hat{O}B) = 90^\circ - a. \quad (1)$$



Pelo Axioma III.4, temos

$$m(A\hat{O}C) = m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C)$$

e, por hipótese,

$$180^\circ = m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C). \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos

$$180^\circ = (90^\circ - a) + m(B\hat{O}C), \text{ ou seja, } m(B\hat{O}C) = 90^\circ + a.$$

Logo, m(BÔC) > 90º.

3.16. Sejam AÔB e BÔC ângulos complementares, ou seja,

$$m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = 90^\circ.$$

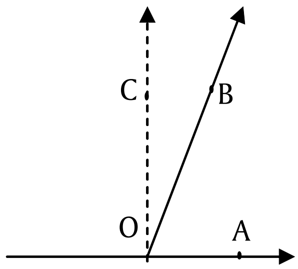
Suponhamos que m(AÔB) = 2.m(BÔC) – 30º. Logo,

$$2.m(B\hat{O}C) - 30^\circ + m(B\hat{O}C) = 90^\circ,$$

ou seja,

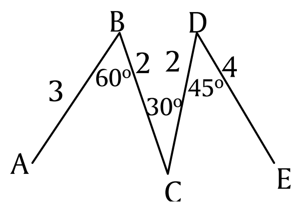
$$3.m(B\hat{O}C) = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

Portanto, m(BÔC) = 40º e m(AÔB) = 50º.



3.17. Por hipótese temos $90 - \alpha = 180 - \beta$. Logo, $\beta - \alpha = 180 - 90 = 90$, como queríamos demonstrar.

3.18. O desenho da poligonal ABCDE é feito ao lado. É possível construir 2^3 poligonais, pois em cada vértice é possível construir dois ângulos a partir de uma semi-reta e cada ângulo fornece duas possibilidades.

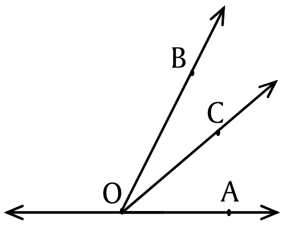


3.19. Pelo Teorema 3.12, temos S_{OC} divide $A\hat{O}B$ ou S_{OB} divide $A\hat{O}C$. No primeiro caso,

$$m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}C)+m(C\hat{O}B) > m(A\hat{O}C),$$

o que contradiz a hipótese. Logo, S_{OB} divide $A\hat{O}C$.

3.20. Existência: Seja $A\hat{O}B$ um ângulo dado e $\underline{k}$ um número real tal que $0<k<1$. Seja $A\hat{O}C$ um ângulo de medida $(1 - k).m(A\hat{O}B)$, tal que C está no mesmo semiplano determinado por r_{OA} que contém B. Temos, pelo Teorema 3.12,



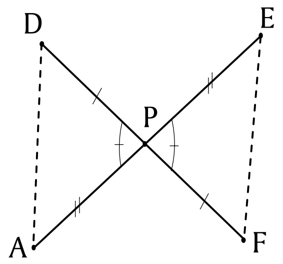
$$\begin{aligned} m(C\hat{O}B) &= |m(A\hat{O}C) - m(A\hat{O}B)| = \\ &= (1 - k).m(A\hat{O}B) - m(A\hat{O}B) = \\ &= |(-k).m(A\hat{O}B)| = k.m(A\hat{O}B). \end{aligned}$$

Unicidade: Imediato da Proposição 3.13.

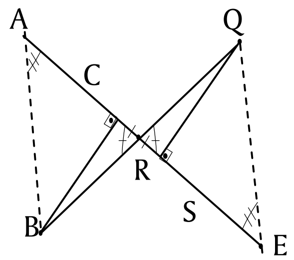
Capítulo 4

4.1. No segundo desenho temos que PSU ≡ QRT. No terceiro desenho temos MPK ≡ NOK. No quarto desenho temos GKI ≡ HKI. No quinto desenho temos que ADC ≡ CBA e no sexto desenho temos XWY ≡ YZX.

4.2. Como P é o ponto médio de ambos os segmentos, então $\overline{AP} = \overline{EP}$ e $\overline{DP} = \overline{FP}$. Como os ângulos $D\hat{P}A$ e $F\hat{P}E$, são opostos pelo vértice, segue da Proposição 3.20 que eles têm as mesmas medidas. Logo, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), temos PDA ≡ PFE.



4.3. Como QB divide EA ao meio, temos que RE ≡ RA. Como $Q\hat{R}S$ e $B\hat{R}S$ são opostos pelo vértice, pela Proposição 3.20, eles têm as mesmas medidas. Além disso, por hipótese, $B\hat{A}R \equiv Q\hat{E}R$ e, pelo Teorema 4.9 (caso ALA), ERQ ≡ ARB, daí temos que EQ ≡ AB. Como. $\overline{AC} = \overline{ES}$, pois $\overline{RS} = \overline{RC}$, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), os triângulos ACB e ESQ são congruentes, logo $A\hat{B}C \equiv E\hat{Q}S$. Como ERQ ≡ ARB, temos que BR ≡ QR, daí, pela Definição 3.7, R é o ponto médio de QB, e AE divide BQ ao meio, como queríamos demonstrar.



4.4. a) Como AE ≡ BC, AD ≡ BD e DE ≡ DC, pelo Teorema 4.11 (Caso LLL) EDA ≡ CDB. Logo $\hat{E} \equiv \hat{C}$.

b) Como AE ≡ BC, AD ≡ BD e $E\hat{A}D \equiv C\hat{B}D$, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), temos EAD ≡ CBD, assim $B\hat{D}C \equiv A\hat{D}E$. Como DA divide $B\hat{D}E$ e DB divide $A\hat{D}C$ temos

$$m(B\hat{D}C) + m(A\hat{D}B) = m(A\hat{D}E) + m(A\hat{D}B)$$

Logo, $B\hat{D}E \equiv A\hat{D}C$, como queríamos demonstrar.

c) Não é possível mostrar que ED ≡ CD, pois não temos congruência do tipo LLA.

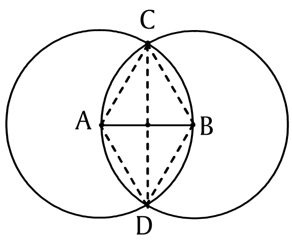
d) É possível, pois pelo Teorema 4.9 (caso ALA), AED ≡ BCD uma vez que DA divide $B\hat{D}E$ e DB divide $A\hat{D}C$ temos

$$m(B\hat{D}E) = m(A\hat{D}C) \Rightarrow m(B\hat{D}E) - m(A\hat{D}B) = m(A\hat{D}C) - m(A\hat{D}B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(B\hat{D}C) \equiv m(A\hat{D}E)$$

4.5. Como por hipótese $A\hat{D}B \equiv A\hat{B}D$ e $C\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$, então $A\hat{D}C \equiv A\hat{B}C$. Além disso, $\overline{AD} = \overline{AB}$ e $\overline{BC} = \overline{DC}$, assim pelo Teorema 4.11 (Caso LLL) os triângulos ADC e ABC são congruentes e portanto DÂC ≡ BÂC, logo AC é a bissetriz de BÂD. Para mostrar que AC é perpendicular a DB, basta observarmos que, pelo Teorema 4.9 (Caso ALA), os triângulos ADE e ABE são congruentes e portanto DE ≡ EB. Logo, E é o ponto médio de DB. Então AE é a mediana em relação a DB e, pelo Teorema 4.6, AE também é a altura. Portanto AC e DB são perpendiculares.

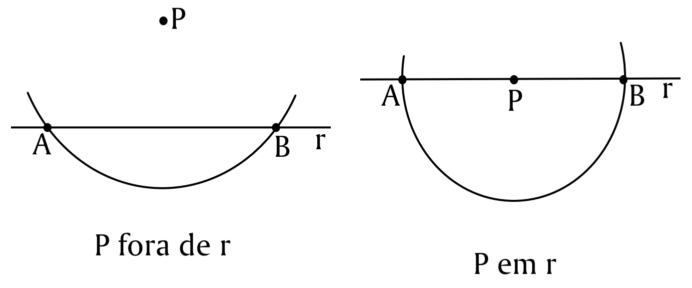
4.6. a) Está correto pois o segmento CD será a mediana do triângulo ABC em relação a base AB (verifique a resolução do Exercício 4.5, levando em conta que ABC e ABD são também isósceles), logo CD divide AB ao meio.



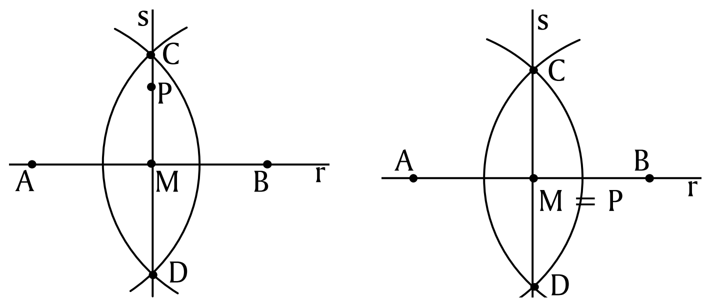
b) Sim, realmente é necessário que as duas circunferências tenham o mesmo raio, pois caso contrário não teríamos triângulos isósceles e a bissetriz não seria a mediana. O raio não precisa necessariamente ter o mesmo comprimento de AB. O raio deve ser maior do que $\frac{\overline{AB}}{2}$ para que ocorra interseção entre as duas circunferências em dois pontos.

c) Como a reta CD é a mediana do triângulo ABC em relação a base AB e o triângulo é isósceles, pois AC e BC são raios, então, pelo Teorema 4.6, CD é a altura do triângulo ABC em relação a BC e, portanto, CD é perpendicular a AB, logo, por definição, a mediatriz de AB.

d) Seja r a reta dada e P o ponto dado. Com a ponta seca do compasso em P, construa um arco de circunferência com raio maior que a distância de P a r, que intercepta r nos pontos A e B.



Agora com a ponta seca do compasso em A e abertura maior que a medida de AP, trace um arco de circunferência Γ de tal forma que encontre o outro arco de circunferência construída com a ponta seca do compasso em B e a mesma abertura usada para construir Γ.



Seja $\Gamma \cap \Lambda = \{C, D\}$. Afirmamos que a reta s dada por CD é a perpendicular procurada. De fato, por construção os segmentos AC, AD, BC e BD são congruentes, assim os triângulos ABC e ABD além de isósceles são congruentes pelo caso LLL; idem para os triângulos ACD e BCD. Assim, AD é bissetriz do ângulo $\hat{C}$, por exemplo. Logo, pelo Exemplo 4.10, CD é altura do triângulo ABC e, portanto perpendicular a r e também mediana em relação ao lado AB, assim $M = s \cap r$ é o ponto médio de AB. Como por construção P eqüidista de A e de B, APM e BPM são congruentes pelo caso LAL ou P coincide com M. Assim, no primeiro caso PM é perpendicular a AB, pelo Teorema 4.6. Segue do

Teorema 3.22 e Teorema 4.18 que a reta PM coincide com a reta s. Logo, a reta s é a reta procurada.

4.7. Por hipótese, AD ≡ DE, Â ≡ DÊC e $A\hat{D}E \equiv B\hat{D}C$. Mostremos que $A\hat{D}B \equiv C\hat{D}E$. De fato,

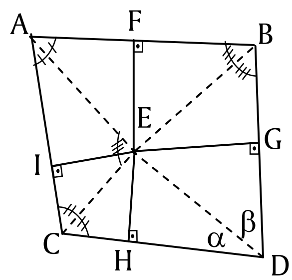
$$m(A\hat{D}B) = m(A\hat{D}E) + m(E\hat{D}B) = m(B\hat{D}C) + m(E\hat{D}B) = m(C\hat{D}E).$$

Logo, pelo Teorema 4.9 (Caso ALA), temos o desejado.

4.8. De fato, suponhamos que r e s não sejam paralelas, ou seja, se interceptam em um ponto A, então os vértices dos ângulos medindo $\alpha = \beta$ e o ponto A formam um triângulo com ângulos medindo α, $180° - \alpha$ e m(Â). Do Teorema 4.13 temos que $\alpha + (180° - \alpha) < 180° \Rightarrow 180° < 180°$ o que é um absurdo. Logo r e s são paralelas.

4.9. Pelo ponto E traçamos as perpendiculares por AB, BD, DC e CA, obtendo os pontos F, G, H e I, respectivamente. Pelo Teorema 4.12 (Caso LAA_o),

AEF ≡ AEI, BEF ≡ BEG e CEI ≡ CEH.



Assim, EF ≡ EI ≡ EG ≡ EH. Logo os triângulos retângulos DGE e DHE têm hipotenusa comum e catetos GE e HE congruentes. Pelo Teorema 4.17 (Caso $LLA_{\square}$), DGE e DHE são congruentes e assim $\alpha = \beta$.

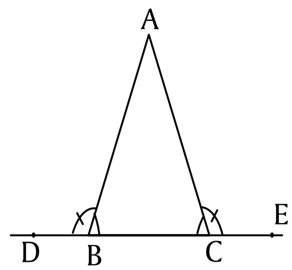
4.10. Sejam ABC um triângulo e $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}E$ ângulos externos congruentes. Como

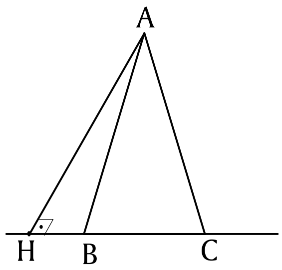
$$m(D\hat{B}C) = m(E\hat{C}B) = 180°,$$

$$m(E\hat{C}B) = m(E\hat{C}A) + m(A\hat{C}B) \text{ e}$$

$$m(D\hat{B}C) = m(D\hat{B}A) + m(A\hat{B}C),$$

então $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$. Portanto, pelo Corolário 4.10, o triângulo ABC é isósceles.





4.11. Seja ABC um triângulo acutângulo, então todos os seus ângulos têm medidas menores do que a de um ângulo reto. Vamos considerar o vértice A e chamamos de H o pé da perpendicular ao lado BC passando por A. Suponhamos que B esteja entre H e C, então no triângulo retângulo AHB o ângulo $A\hat{B}H$ é agudo e assim a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é maior do que a de um ângulo reto. Isto contradiz a hipótese. O mesmo ocorre se supormos que C esteja entre HM e B. Resta então o último caso que é H entre B e C. Se o triângulo for retângulo teremos o pé da perpendicular em relação aos lados adjacentes ao ângulo reto igual ao vértice oposto. Se o triângulo for obtusângulo teremos o pé da perpendicular aos lados adjacentes ao ângulo obtuso pertencente ao exterior do lado considerado.

4.12. Pelo Teorema 4.13, um triângulo retângulo possui dois ângulos agudos, logo, pela definição de ângulo externo temos que existem dois ângulos externos obtusos que são suplementares destes dois ãngulos internos.

4.13. a) ω, ε e γ são menores que ρ, pois $D\hat{B}A$ é externo ao triângulo BDC e $E\hat{D}F$ é oposto pelo vértice a $C\hat{D}B$.

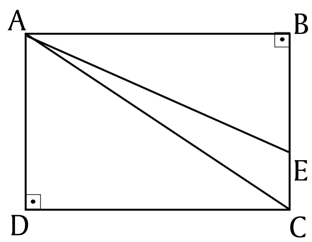
b) ρ, pois $D\hat{B}A$ é externo a DBC e β, pois $D\hat{F}A$ é externo a DEF e $E\hat{D}F$ é oposto pelo vértice a $C\hat{D}B$.

c) α, μ, θ e ω, pois $F\hat{D}B$ é externo a BCD e a DEF.

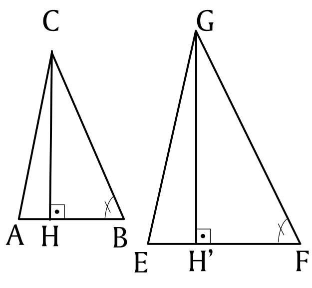
4.14. Como o triângulo ABC é isósceles e $m(B\hat{C}A) < 90^o$, pois caso contrário teríamos que $m(B\hat{C}A) + m(B\hat{A}C) \geq 180^o$. Como o triângulo BCD também é isósceles temos $m(B\hat{C}D) > m(C\hat{D}B)$, pois caso contrário $m(C\hat{D}B) + m(C\hat{B}D) > 180^o$, uma vez que $m(B\hat{C}D) > 90^o$. Assim, pela Proposição 4.22, $\overline{BD} > \overline{BC}$. Como $\overline{BC} = \overline{AB}$ por hipótese temos que $\overline{BD} > \overline{AB}$.

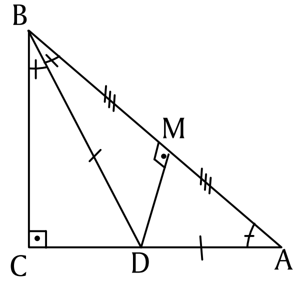
4.15. Como A, C e D são colineares m($A\hat{C}B$) + m($D\hat{C}E$) = 180º (1). Se m($A\hat{C}B$) > 90º, temos pela Proposição 4.22, que AB é o maior lado de ABC. De (1) temos m($D\hat{C}E$) < 90º e assim ED não pode ser o maior lado de CDE e como, por hipótese, $\overline{EC} < \overline{BC}$ e ABC ≡ CDE, temos que o maior lado de CDE dever ser CD. Como ABC e EDC são congruentes AB ≡ CD. Mas, pelo Teorema 4.8, m($A\hat{C}E$) > m($C\hat{E}D$), o que é um absurdo. Assim, m($A\hat{C}B$) ≤ 90º. Com raciocínio semelhante, concluímos que m($D\hat{C}E$) ≤ 90º. Segue de (1) que m($A\hat{C}E$) = m($D\hat{C}E$) = 90º. Assim, ED ≡ AB, BC ≡ CD e AC ≡ CE. Pelo Teorema 4.24, temos $\overline{AB} \leq \overline{BC} + \overline{AC}$, como A, B e C não são colineares então $\overline{AB} \neq \overline{BC} + \overline{AC}$. Logo, $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC}$, mas como $ABC \equiv EDC$, temos que $BC \equiv CD$, assim $\overline{AB} < \overline{CD} + \overline{AC} = \overline{AD}$ e portanto $\overline{AD} > \overline{AB}$.

4.16. Suponhamos que $\overline{BC} > \overline{AD}$, então existe um ponto E entre B e C tal que $\overline{BE} = \overline{AD}$. Como $AB \equiv DC$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são retos por hipótese, então pelo Teorema 4.3 (caso LAL), ABE ≡ ADC e portanto AE ≡ AC. Com isso temos que o triângulo AEC é isósceles e $A\hat{E}C \equiv A\hat{C}E$. Como $A\hat{E}C$ é ângulo externo ao triângulo ABE e $m(\hat{B}) = 90^o$, então $m(A\hat{E}C) \equiv m(A\hat{C}E) > 90^o$, o que contradiz o Teorema 4.13, pois m($A\hat{E}C$) + $m(A\hat{C}E) > 180^o$. Logo, AD ≡ BC.

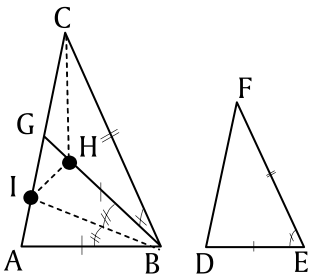


4.17. Consideremos os triângulos ABC e EFG dados. Seja CH altura de ABC por C e GH' a altura de EFG por G. Como, por hipótese, CH ≡ GH', BC ≡ FG e os triângulos CHB e GH'F são retângulos em H e H' respectivamente, então, pelo Teorema 4.17 (Caso LLA□), temos CHB ≡ GH'F. Assim, $C\hat{B}A \equiv G\hat{F}E$. Como AB ≡ EF, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), ABC ≡ EFG.





4.18. Seja BD a bissetriz de $\hat{B}$. Como $m(\hat{A}) = \dfrac{m(\hat{B})}{2}$, o triângulo ABD é isósceles. Por D tracemos a mediana em relação a AB no triângulo ABD. Assim, $\overline{BM} = \overline{MA}$ e $m(D\hat{M}B) = 90^o$, pelo Teorema 4.6. Pelo Teorema 4.12 (Caso LAA_o), os triângulos BCD BMD são congruentes e portanto $\overline{CB} = \overline{BM}$. Como $\overline{BM} = \overline{MA}$, então $2\overline{BC} = 2\overline{BM} = \overline{BM} + \overline{BM} = \overline{BM} + \overline{MA} = \overline{AB}$.



4.19. Consideremos ABC e DEF triângulos quaisquer tais que AB ≡ DE, BC ≡ EF e m($\hat{B}$) > m(Ê). Devemos mostrar que $\overline{AC} > \overline{DF}$. Seja G um ponto em AC tal que $C\hat{B}G$ ≡ Ê. Seja H um ponto sobre BG tal que BH ≡ DE. Pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), temos HBC ≡ DEF e então HC ≡ DF. Se H está sobre o segmento AC então temos $\overline{HC} < \overline{AC}$ e, portanto, $\overline{DF} < \overline{AC}$. Suponhamos que H não pertença a AC. Assim, consideremos I o ponto em que a bissetriz do ângulo $A\hat{B}H$ intercepta AC. Pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), temos ABI ≡ HBI e então AI ≡ HI. Pelo Teorema 4.25, $\overline{HC} < \overline{CI} + \overline{HI}$ e daí temos que $\overline{DF} = \overline{HC} < \overline{CI} + \overline{IA} = \overline{CA}$, ou seja, $\overline{DF} < \overline{AC}$. Para provar a recíproca, suponhamos que AB ≡ DE, BC ≡ EF e $\overline{DF} < \overline{AC}$. Se $m(\hat{B}) < m(\hat{E})$ temos, pelo que foi feito anteriormente que $\overline{DF} > \overline{AC}$, o que é uma contradição. Se $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), temos ABC ≡ DEF e, portanto, AC ≡ DF contrariando novamente a hipótese. Logo, $m(\hat{B}) > m(\hat{E})$, como queríamos demonstrar.

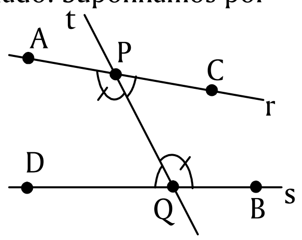
4.20. a) Seja AB um segmento de reta e M o ponto médio. Considere um número real r maior do que $\dfrac{\overline{AB}}{2}$ e teremos AB ⊂ C, onde C é um círculo de centro M e raio r.

b) Para obter o raio r de um círculo C que contenha triângulos e quadriláteros, considere a maior distância entre os vértices do triângulo ou do quadrilátero. O centro de C será qualquer vértice.

c) Obtém-se o centro e o raio do círculo da mesma forma que o item b).

Capítulo 5

5.1. Sejam r, s e t retas conforme desenho ao lado. Suponhamos por hipótese que $B\hat{Q}P \equiv A\hat{P}Q$. Devemos mostrar que $C\hat{P}Q \equiv D\hat{Q}P$. De fato, como os ângulos $A\hat{P}C$ e $D\hat{Q}B$ são rasos temos:

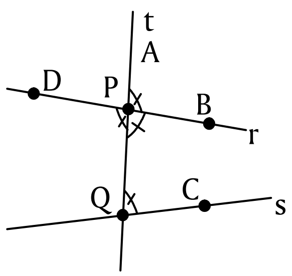


$$m(A\hat{P}Q)+m(Q\hat{P}C)=180^0 \quad \text{e}$$
$$m(D\hat{Q}P)+m(B\hat{Q}P)=180^0.$$

Sendo assim temos $m(A\hat{P}Q)+m(Q\hat{P}C) = m(D\hat{Q}P)+m(B\hat{Q}P)$. Mas como $B\hat{Q}P \equiv A\hat{P}Q$, temos que $C\hat{P}Q \equiv D\hat{Q}P$.

5.2. Como AB e CD se dividem ao meio temos que CE ≡ ED e AE ≡ EB, também temos que, CÊB e AÊD são opostos pelo vértice, daí segue da Proposição 3.20 que CÊB ≡ AÊD. Assim, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), os triângulos ADE e BCE são congruentes e portanto $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Mas como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos alternos internos congruentes, do Teorema 5.4 temos que CB // AD.

5.3. a) Devemos mostrar que se tivermos $m(C\hat{Q}P)+m(B\hat{P}Q)=180^o$ então r e s são paralelas. Sabemos que $Q\hat{P}A$ é um ângulo raso, portanto $m(Q\hat{P}B)+m(B\hat{P}A)=180^o$. Logo, $m(Q\hat{P}B)+m(B\hat{P}A)=m(C\hat{Q}P)+m(Q\hat{P}B)$ e, portanto, $B\hat{P}A \equiv C\hat{Q}P$. Mas como $B\hat{P}A$ é ângulo



oposto pelo vértice a $D\hat{P}Q$, da Proposição 3.20, temos que $B\hat{P}A \equiv D\hat{P}Q$. Assim, temos que $C\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ são ângulos alternos internos congruentes. Logo, do Teorema 5.4, r e s são paralelas.

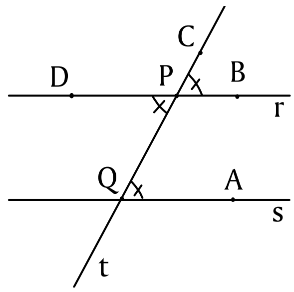
b) Pelo Exemplo 5.4, sabemos que $A\hat{Q}P \equiv C\hat{P}B$, pois são ângulos correspondentes. Sabemos também que

$$m(B\hat{P}Q) + m(B\hat{P}C) = 180^o$$

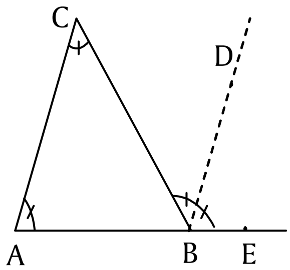
pois $Q\hat{P}C$ é um ângulo raso. Logo,

$$m(B\hat{P}C) + m(A\hat{Q}P) = m(B\hat{P}Q) + m(C\hat{P}B) = 180^0.$$

Portanto, os ângulos $B\hat{P}Q$ e $A\hat{Q}P$ são suplementares.



5.4. Considerando o desenho ao lado temos por hipótese que $D\hat{B}C \equiv D\hat{B}E$ e que AC // BD. Como AC // BD, os ângulos $\hat{A}$ e $D\hat{B}E$ são ângulos correspondentes, e portanto congruente, pelo item a). Os ângulos $D\hat{B}C$ e $\hat{C}$ são ângulos alternos internos e portanto congruentes, pelo Teorema 5.4.



Assim temos que $\hat{A} \equiv D\hat{B}E \equiv D\hat{B}C \equiv \hat{C}$ e pelo Corolário 4.10 o triângulo ABC é isósceles. A recíproca é verdadeira apenas quando o ângulo externo não é o suplementar dos ângulos internos da base.

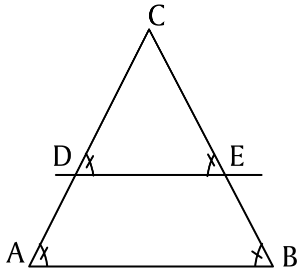
5.5. Como BP ≡ BQ e BX ≡ BY então os triângulos PBQ e XBY são isósceles. Como AP ≡ AQ, então BA é a mediana relativa a PQ e portanto é também a altura do triângulo PBQ , pelo Teorema 4.6. De maneira análoga, BC é a altura do triângulo XBY em relação a XY. Como A, B e C são colineares então a reta AC é perpendicular a PQ e a XY. Assim, pelo Corolário 4.15, PQ e XY não se interceptam.

5.6. Como $C\hat{D}E$ e $C\hat{A}B$ são ângulos correspondentes congruentes, então, pelo Exemplo 5.4, DE // AB. Por hipótese, r é perpendicular a AB, logo, pelo Teorema 5.4 e Exemplo 5.4, r é perpendicular a DE.

5.7. Como, por hipotese, RT ≡ RS o triângulo RST é isósceles, e pelo Corolário 4.4, $R\hat{T}S \equiv R\hat{S}T$. Como PQ é paralelo a RS, pelo Exemplo 5.4 temos que $P\hat{Q}T \equiv RST$, pois são ângulos correspondentes congruentes.

Logo, $P\hat{T}Q \equiv R\hat{S}T \equiv P\hat{Q}T$ e, portanto, pela Corolário 4.10, o triângulo PQT é isósceles. Assim, $PQ \equiv PT$.

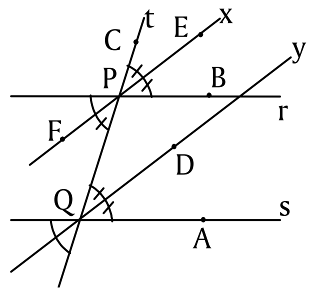
5.8. Seja ABC um triângulo isósceles e considere a reta DE paralela a base AB tal que D esteja entre A e C e E esteja entre B e C. Como $C\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$ e DE // AB, pelo Exemplo 5.4, os ângulos correspondentes $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}E$ são congruentes e $C\hat{B}A$ e $C\hat{E}D$ também o são, assim temos $C\hat{D}E \equiv C\hat{A}B \equiv$



$C\hat{B}A \equiv C\hat{E}D$. Logo, do Corolário 4.10, CDE é um triângulo isósceles.

5.9. Temos, por hipótese, que $N\hat{M}X \equiv Q\hat{M}X$ e como QR // MN, além disso os ângulos $N\hat{M}X$ e $Q\hat{X}M$ são congruentes, pelo Teorema 5.4. Assim $Q\hat{X}M \equiv Q\hat{M}X$ e portanto o triângulo QMX é isósceles pelo Corolário 4.10. De maneira análoga ao item anterior, $R\hat{N}X \equiv X\hat{N}M$ e como MN // QR, os ângulos $M\hat{N}X$ e $R\hat{X}N$ são ângulos alternos internos congruentes, pelo Teorema 5.4. Logo, $R\hat{X}N \equiv R\hat{N}X$ e, portanto, o triângulo RXN é isósceles, pelo Corolário 4.10.

5.10. No desenho ao lado devemos mostrar que $F\hat{P}Q$ e $D\hat{Q}P$ são congruentes, pois se esse for o caso, pelo Teorema 5.4, as retas x e y que são bissetrizes dos ângulos $B\hat{P}C$ e $A\hat{Q}P$ respectivamente serão paralelas. De fato, $F\hat{P}Q \equiv C\hat{P}E$, pois são opostos pelo vér-



-tice (Proposição 3.20). Temos $C\hat{P}E \equiv E\hat{P}B$, por hipótese. Logo, $F\hat{P}Q \equiv E\hat{P}B$. Como $D\hat{Q}P \equiv A\hat{Q}D$, por hipótese, temos

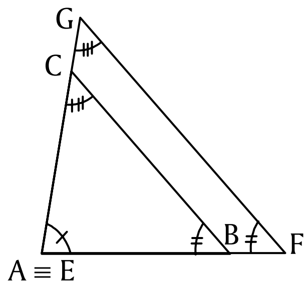
$$m(F\hat{P}Q) \equiv m(E\hat{P}B) \equiv \frac{m(B\hat{P}C)}{2} \equiv \frac{m(A\hat{Q}P)}{2} \equiv m(A\hat{Q}D) \equiv m(D\hat{Q}P)$$

como queríamos demonstrar.

5.11. Seja D o ponto de interseção de AO com a circunferência, ou seja, AD é um diâmetro da circunferência. Pelo Exemplo 5.10, $m(C\hat{O}D) = 2m(C\hat{A}D)$ e $m(B\hat{O}D) = 2.m(B\hat{A}D)$, logo,

$$m(C\hat{O}B) = m(C\hat{O}D) + m(B\hat{O}D) = 2.m(C\hat{A}D) + 2.m(B\hat{A}D) =$$
$$= 2.(m(C\hat{A}D) + m(B\hat{A}D)) = 2.m(C\hat{A}B).$$

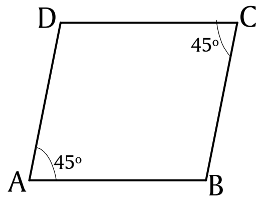
5.12. a) $\hat{C} \equiv \hat{G}$ é verdadeira pois, pelo Teorema 5.6, temos
$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^o \text{ e } m(\hat{E}) + m(\hat{F}) + m(\hat{G}) = 180^o.$$
Assim,
$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = m(\hat{E}) + m(\hat{F}) + m(\hat{G})$,
como $m(\hat{A}) = m(\hat{E})$ e $m(\hat{B}) = m(\hat{F})$, temos $\hat{C} \equiv \hat{G}$.



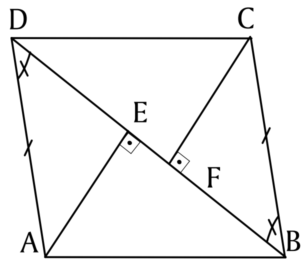
b) Falso, observe o desenho ao lado, pois os triângulos podem não ser congruentes, apesar de possuirem os três ângulos iguais (Veja Exemplo 4.14).

5.13. No triângulo RPV temos que $m(\hat{R}) + m(\hat{P}) + m(R\hat{V}P) = 180^o$ e no triângulo SVQ temos que $m(S\hat{V}Q) + m(V\hat{S}Q) + m(\hat{Q}) = 180^o$. Assim temos $m(\hat{R}) + m(\hat{P}) + m(R\hat{V}P) = m(S\hat{V}Q) + m(V\hat{S}Q) + m(\hat{Q})$. Como $\hat{R}$ e $V\hat{S}Q$ são ângulos retos e $R\hat{V}P \equiv S\hat{V}Q$ pois são opostos pelo vértice, temos $\hat{P} \equiv \hat{Q}$.

5.14. Para o triângulo ABC temos que $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(A\hat{C}B) = 180^o$ e para o triângulo BCD temos que $m(\hat{B}) + m(B\hat{C}D) + m(B\hat{D}C) = 180^o$. Assim, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(A\hat{C}B) = m(\hat{B}) + m(B\hat{C}D) + m(B\hat{D}C)$. Como os ângulos $m(A\hat{C}B)$ e $m(B\hat{D}C)$ são ângulos retos, temos $m(\hat{A}) = m(B\hat{C}D)$.

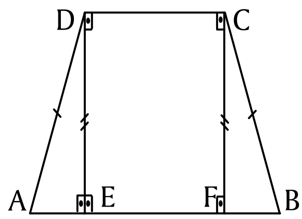


5.15. Seja ABCD um paralelogramo tal que m(Â) = 45º. Pelo item a) da Proposição 5.10, temos que $m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = 45^o$. Pelo item b) da Proposição 5.10, $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^o$, assim $m(\hat{B}) = 135^o$ e, novamente, pelo item a) da Proposição 5.10, temos $m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 135^o$.



5.16. Sejam ABCD um paralelogramo e BD uma diagonal dada. Consideremos AE e CF ambos perpendiculares a BD. Pelo Corolário 4.15, AE é paralelo a CF. Sabemos, pelo item a) da Proposição 5.10, que AD ≡ BC e como AD é paralelo a BC, pelo Teorema 5.4 temos, $A\hat{D}E \equiv C\hat{B}F$. Assim, pelo Teorema 4.12 (caso LAA_O), os triângulos ADE e CBF são congruentes e, portanto, AE ≡ CF.

5.17. É verdadeiro, a primeira parte segue do item c) da Proposição 5.10 e a recíproca segue do item b) da Proposição 5.11.



5.18. Sejam DE e CF ambas perpendiculares a AB. Como CD // AB então, pela Proposição 5.5, DE ≡ CF. Assim pelo Teorema 4.17 (Caso $LLA_{\square}$), os triângulos ADE e BCF são congruentes. Logo, $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $A\hat{D}E \equiv B\hat{C}F$. Como $C\hat{D}E \equiv D\hat{C}F = 90^o$, então

$$m(A\hat{D}E) + m(C\hat{D}E) = m(B\hat{C}F) + m(D\hat{C}F) \Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{C},$$

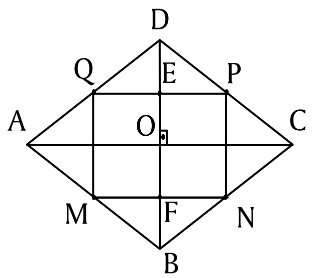
como queríamos demonstrar.

5.19. Seja ABC um triângulo qualquer e M, N e P os respectivos pontos médios de AB e BC e CA. Como M e N são os pontos médios de AB e BC, respectivamente, pelo Teorema 5.12, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{CA}$. Analogamente, concluímos que $\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ e $\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Assim,

$$\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}).$$

Como $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ é o perimetro do triângulo ABC, segue o desejado.

5.20. Seja ABCD um losango e M, N P e Q os pontos médios de AB, BC, CD e DA respectivamente. Pelo item a) da Proposição 5.14, AC e BD são perpendiculares. Pelo Teorema 5.12 temos PQ // AC, considerando o triângulo ACD, QM // BD considerando o triângulo ABD, MN // AC considerando o triângulo ABC e NP // BD considerando o triângulo BCD. Logo, MN // PQ e NP // MQ.



Seja E o ponto onde PQ intercepta BD, assim $m(D\hat{E}P)\equiv m(D\hat{O}C)=90^o$, pois são ângulos correspondentes, $m(D\hat{E}P)\equiv m(E\hat{P}N)=90^o$, pois são ângulos alternos internos e $m(D\hat{E}Q)\equiv m(E\hat{Q}M)=90^o$, pois também são ângulos alternos internos. Assim, pelo Exemplo 5.4 , $m(E\hat{Q}M)\equiv m(M\hat{N}P)=90^o$ e $m(E\hat{P}N)\equiv m(N\hat{M}Q)=90^o$. Portanto, o quadrilátero MNPQ é um retângulo.

Capítulo 6

6.1. Seja R um quadrado de lado medindo a. Temos, pelo Axioma III.7, que $A(R)=a^2$. Assim, ao duplicarmos a medida do lado teremos $A(R_1)=(2a)^2 = 4a^2$. Logo, a área é quadruplicada em relação à área do quadrado R. Ao triplicarmos a medida dos lados teremos $A(R_2)=(3a)^2 =9a^2$. Logo, a área é nove vezes a área do quadrado de lado a. Ao dividirmos a medida do lado por 2 teremos $A(R_3)=\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. Logo, a área é reduzida a um quarto da área do quadrado original.

6.2. Seja R um retângulo de base medindo b e altura medindo h, sabemos, pelo Teorema 6.6, que $A(R)=b.h$.
a) Se duplicarmos a medida h da altura teremos $A(R_1)=b(2h)=2(bh)$. Logo, a área é duplicada.
b) Se duplicarmos a medida b da base teremos $A(R_2) = (2b)h = 2(bh)$. Logo, a área também é duplicada.
c) Se duplicarmos a medida b da base e a medida h da altura teremos $A(R_3) = (2b)(2h) = 4(bh)$. Logo, a área é quadruplicada.

6.3. Seja R_1 um retângulo de base medindo b e altura medindo h_1 e R_2 outro retângulo de base de mesma medida b e altura medindo h_2. Temos pelo Teorema 6.6 que $A(R_1)=bh_1$ e $A(R_2)= bh_2$. Assim, $\frac{A(R_1)}{A(R_2)}=\frac{bh_1}{bh_2}=\frac{h_1}{h_2}$, como queríamos demonstrar.

6.4. a) Seja T_1 e T_2 triângulos de bases de mesma medida b e alturas medindo h. Pelo Teorema 6.8, $A(T_1)=\frac{b.h}{2}$ e $A(T_2)=\frac{b.h}{2}$. Logo, T_1 e T_2 têm mesmas áreas.

b) Dados dois triângulos T_1 e T_2 de alturas medindo h e bases medindo b_1 e b_2, respectivamente. Temos, pelo Teorema 6.8, que $A(T_1)=\frac{b_1h}{2}$ e

$A(T_2)=\dfrac{b_2h}{2}$. Assim, $\dfrac{A(T_1)}{A(T_2)}=\dfrac{\frac{b_1h}{2}}{\frac{b_2h}{2}}=\dfrac{b_1h}{2}\cdot\dfrac{2}{b_2h}=\dfrac{b_1h}{b_2h}=\dfrac{b_1}{b_2}$, como queríamos demonstrar.

6.5. Um polígono regular P de n lados determina n triângulos isósceles T_1, T_2, ..., T_n com bases de mesma medida $\dfrac{2p}{n}$ e alturas medindo a, que são apótemas do polígono. Sendo assim, pelo Axioma III.6, temos

$$A(P)=A(T_1)+A(T_2)+\ldots+A(T_n)=\frac{a.\frac{2p}{n}}{2}+\frac{a.\frac{2p}{n}}{2}+\ldots+\frac{a.\frac{2p}{n}}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}a.(\frac{2p}{n}+\frac{2p}{n}+\ldots+\frac{2p}{n})=\frac{1}{2}a.\left(\frac{n.2p}{n}\right)=\frac{1}{2}a.2p=a.p=p.a.$$

6.6. Como os dois triângulos possuem um cateto com a mesma medida podemos considerar T_1 e T_2 triângulos com altura de mesma medida e bases com medidas diferentes. Então, pelo Exercício **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**, temos $\dfrac{A(T_1)}{A(T_2)}=\dfrac{18}{24}=\dfrac{3}{4}$. Logo a razão entre as áreas dos dois triângulos é $\dfrac{3}{4}$.

6.7. Seja T o triângulo ABC.

a) Pelo Teorema 6.8, temos que A(T)= $\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=\dfrac{8.9}{2}=36$. Por outro lado, A(T) $=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{2}=\dfrac{\overline{BC}.6}{2}$. Assim, $36=\dfrac{\overline{BC}.6}{2}$ o que implica que $\overline{BC}=12$.

b) Pelo Teorema 6.8, temos que A(T)= $\dfrac{15.5}{2}=\dfrac{75}{2}$. Por outro lado, também pelo Teorema 6.8, A(T) = $\dfrac{11.\overline{CD}}{2}$. Logo,

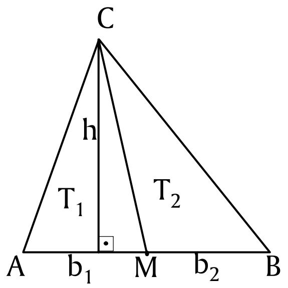
$$\frac{75}{2}=\frac{11.\overline{CD}}{2}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{75}{11}.$$

c) Pelo Teorema 6.8, A(T)= $\frac{c.h}{2}$. Por outro lado, A(T) = $\frac{a.\overline{AE}}{2}$. Assim,

$$\frac{c.h}{2}=\frac{a.\overline{AE}}{2}\Rightarrow\overline{AE}=\frac{c.h}{a}.$$

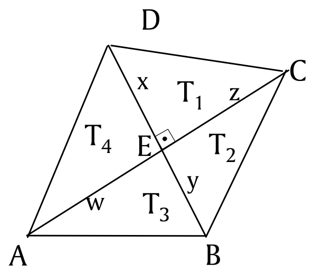
6.8. Sejam T um triângulo de base medindo b e altura medindo h_1 e P um paralelogramo de base medindo b e altura medindo h_2, temos, pelo Teorema 6.8, que A(T)= $\frac{bh_1}{2}$ e, pelo Corolário 6.10, A(P)=bh_2. Como por hipótese A(T)= A(P), temos $\frac{bh_2}{2}=bh_2\Rightarrow h_1=2h_2$, ou seja, a altura do triângulo mede o dobro da medida da altura do paralelogramo.

6.9. Seja ABC um triângulo qualquer e CM a mediana traçada por C. Assim, os triângulos T_1= AMC e T_2= MBC, por defini-ção, têm altura com a mesma medida h. Como por hipótese temos que b_1 = b_2 = b, pois CM é uma mediana, teremos, pelo Teorema 6.8, que A(T_1)= $\frac{b_1h}{2}$ = $\frac{bh}{2}$ e



A(T_2)= $\frac{b_2h}{2}$ = $\frac{bh}{2}$. Logo A(T_1) = A(T_2).

6.10. a) Considere ABCD um quadrilátero convexo, com diagonais perpendiculares entre si como no desenho ao lado. A convexidade de ABCD garante que as diagonais dividem o quadrilátero em 4 triângulos. Seja m a medida da diagonal maior e n a medida da diagonal menor. Como os triângulos CED= T_1, BEC= T_2 , AEB= T_3 e AED= T_4 são retângulos, por hipótese, temos do Axioma III.6 e



da Proposição 6.7, que

$$A(ABCD)=A(T_1)+A(T_2)+A(T_3)+A(T_4)=$$

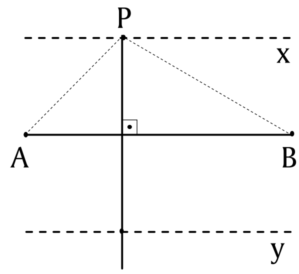
$$=\frac{xz}{2}+\frac{zy}{2}+\frac{wy}{2}+\frac{wx}{2}=\frac{z(x+y)}{2}+\frac{w(x+y)}{2}=\frac{(x+y)(z+w)}{2}$$

Como $x+y=n$ e $z+w=m$, temos $A(ABCD)=\frac{m.n}{2}$,

como queríamos demonstrar.

b) Dado um losango L de diagonais medindo m e n, sabemos pelo item a) da Proposição 5.14 que as diagonais do losango se cortam formando ângulos de 90°. Logo, pelo item a), $A(L)=\frac{m.n}{2}$, que é a metade do produto das diagonais.

6.11. Queremos um ponto P tal que A(T)=k, onde T é o triângulo ABP. Assim, se h é a medida da altura de ABP em relação a AB, pelo Teorema 6.8, $A(T)=\frac{\overline{AB}.h}{2}$, ou seja, $\frac{\overline{AB}.h}{2}=k$. Logo, $h=\frac{2.k}{\overline{\overline{AB}}}$. Então, basta considerarmos um ponto P tal que a

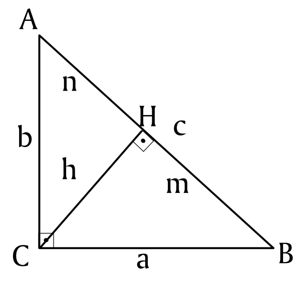


distância de P a AB seja $\frac{2k}{\overline{\overline{AB}}}$. Assim , $A(T)=\frac{\overline{AB}}{2}.\frac{2k}{\overline{\overline{AB}}}=k$. Existem infinitos pontos com esta propriedade: são os pontos X que pertence as retas x e y paralelas a AB e que distam $\frac{2k}{\overline{\overline{AB}}}$ da reta AB.

6.12. Consideremos o triângulo ABC ao lado de catetos medindo a e b e altura relativa a hipotenusa medindo h. A área de ABC pode ser calculada de duas maneiras:

$$A(ABC)=\frac{c.h}{2}=\frac{a.b}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos $c^2=a^2+b^2$,



ou seja, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Logo, h = $\dfrac{a.b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

6.13. Pelo Teorema 6.11 (Teorema de Pitágoras), temos

$$\left(\overline{OB}\right)^2 = m^2 + m^2 \Rightarrow \left(\overline{OB}\right)^2 = 2m^2 \Rightarrow \overline{OB} = m\sqrt{2}\ ,$$

$$\left(\overline{OC}\right)^2 = m^2 + \left(m\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{OC}\right)^2 = m^2 + 2m^2 \Rightarrow \left(\overline{OC}\right)^2 = 3m^2 \Rightarrow \overline{OC} = m\sqrt{3}\ ,$$

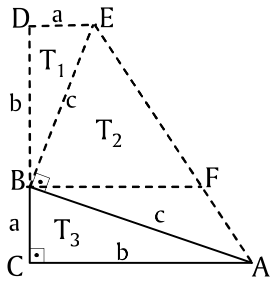
$$\left(\overline{OD}\right)^2 = m^2 + \left(m\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{OD}\right)^2 = m^2 + 3m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overline{OD}\right)^2 = 4m^2 \Rightarrow \overline{OD} = 2m = m\sqrt{4}.$$

$\left(\overline{OE}\right)^2 = m^2 + (2m)^2 \Rightarrow \left(\overline{OE}\right)^2 = 5m^2 \Rightarrow \overline{OE} = m\sqrt{5}$, a próxima deverá ser $m\sqrt{6}$. Generalizando o resultado temos
$\overline{OX_i} = m\sqrt{i+1}$; com $i=1,2,\ldots$, onde X_i é a extremidade da hipotenusa de cada triângulo retângulo construído.

6.14. Seja T o trapézio DEAC, onde DE // AC e ABC um triângulo retângulo em C conforme desenho ao lado. Primeiramente vamos demonstrar que m($E\hat{B}A$) = 90º. Para isto, consideremos a reta BF paralela a DE. Como m($\hat{C}$) = 90º então

$$mC\hat{B}A) + m(C\hat{A}B) = 90^o\ .$$

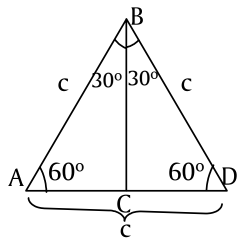


Como os triângulos ABC e BED são congruentes pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), temos que $C\hat{A}B \equiv E\hat{B}D$ e $C\hat{B}A \equiv B\hat{E}D$. Como BF e DE são paralelas os ângulos $B\hat{E}D$ e $E\hat{B}F$ são congruentes, pois são ângulos alternos-internos. Analogamente $C\hat{A}B \equiv A\hat{B}F$. Como BF passa por B ela divide o ângulo $E\hat{B}A$ e, assim, $m(E\hat{B}A) = mC\hat{B}A) + m(C\hat{A}B) = 90^o$.

Pelo Teorema 6.9, A(T)= $\dfrac{(b+a)(b+a)}{2}$. Por outro lado pelo Axioma III.6, temos que A(T)= $\dfrac{ab}{2} + \dfrac{ab}{2} + \dfrac{cc}{2}$. Igualando as duas equações temos

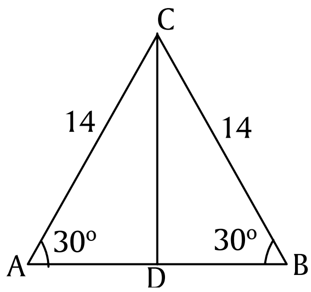
$$\frac{b^2 + ab + ab + a^2}{2} = \frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2\ .$$

6.15. (1º. Modo) Seja ABC um triângulo retângulo em C e ângulos agudos medindo 30º e 60º, cujo lado AB mede c. Considere um ponto D sobre a reta AC no semi-plano oposto a A em relação à BC tal que $C\hat{B}D = 30^o$. Assim obtemos um triângulo equilátero de lado c. Como BD ≡ BA, $D\hat{B}C \equiv A\hat{B}C$ e BC é comum aos triângulos ABC e DBC, temos pelo Teorema 4.3 (Caso LAL) que estes são congruentes. Logo, $\overline{AC} = \dfrac{c}{2}$. Além disso, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = c^2 - \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = c^2 - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{3c^2}{4}$. Logo, $\overline{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.

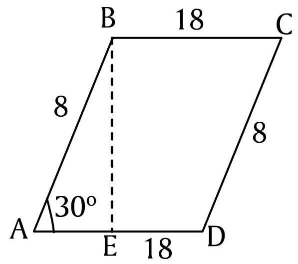


(**2º. Modo)** Pelo Exercício 4.18 temos $\overline{AC} = \dfrac{1}{2}c$. Pelo Teorema 6.11 (Teorema de Pitágoras), $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \dfrac{3c^2}{2}$. Logo, $\overline{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.

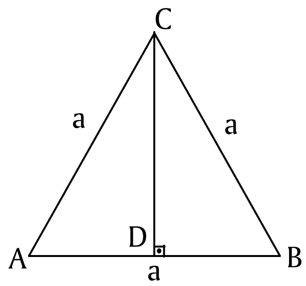
6.16. Seja ABC um triângulo isósceles tal que $\overline{AC} = \overline{BC} = 14$ e $C\hat{A}B \equiv C\hat{B}A = 30^o$. Seja D o ponto médio de $\overline{AB}$ então CD é a bissetriz de $A\hat{C}B$ e a altura de ABC em relação à AB. Logo, BCD é um triângulo retângulo com ângulos agudos 30º e 60º. Pelo Exercicio 6.16, $\overline{AB} = 2.\overline{BD} = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.14 = 14\sqrt{3}$ e $\overline{CD} = \dfrac{14}{2} = 7$. Temos então, $A(ABC) = \dfrac{14.\sqrt{3}.7}{2} = 49.\sqrt{3}$ cm².



6.17. Seja ABCD um paralelogramo onde AD é paralelo a BC, m(BÂD) = 30º, $\overline{AB} = 8$ e $\overline{AD} = 18$. Traçando a altura por B relativa ao lado AD obteremos um triângulo retângulo com ângulos 30º e 60º. Logo, pelo Exercício 6.15, temos que $\overline{BE} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$ e, portanto, pelo Corolário 6.10, $\text{Área}(ABCD) = \overline{AD}.\overline{BE} = 18.4 = 72$.



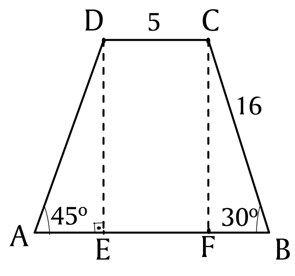
6.18. Consideremos um triângulo equilátero ABC e CD a altura em relação a AB. Logo, $h = \overline{CD}$. Como o triângulo é eqüilátero, seja a a medida dos lados deste triângulo, temos, pelo Exemplo 4.10, que a altura é também a mediana. Assim $\overline{BD} = \dfrac{1}{2}.a = \overline{AD}$. Pelo Teorema de Pitágoras



temos que $a^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, logo, $h^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{4a^2 - a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$. Assim, temos $a^2 = \dfrac{4h^2}{3}$, ou seja, $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$. Pelo Teorema 6.8, temos

$$A = \frac{a.h}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}.h.h}{6} = \frac{\sqrt{3}.h^2}{3}.$$

6.19. Seja ABCD um trapézio conforme o desenho ao lado. Tracemos as alturas DE e CF. Pelo Exercício 6.15, temos $\overline{BF} = \dfrac{\overline{BC}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ e $\overline{CF} = \dfrac{\overline{BC}}{2} = 8$. Como o triângulo ADE é isósceles, pois $A\hat{D}E = 45^o$, temos $\overline{AE} = \overline{DE}$. Além disso,



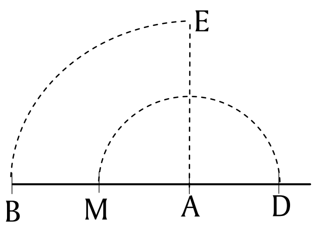
CD é paralelo a AB e, logo, $\overline{AE} = \overline{CF} = 8$. Também, $\overline{EF} = 5$, pois EFCD é um retângulo, uma vez que DE e CF são alturas do trapézio. Portanto,

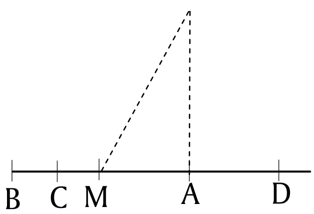
$$A(ABCD) = \frac{1}{2}.\left[\left(\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{BF}\right) + \overline{DC}\right]\overline{CF} =$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\left(8 + 5 + 8\sqrt{3}\right) + 5\right]8 = \left(18 + 8\sqrt{3}\right)4 = 72 + 32\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

6.20. Seja a = $\overline{AB}$ e x = $\overline{AC}$. Por hipótese, temos $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, assim $a^2 - ax = x^2$ e,

então x = $\frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$. Como x é medida de segmento, x = $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que é chamada a proporção áurea. Para encontrar o ponto C, encontramos o ponto médio M de AB como feito no Exercício 4.6. Com a ponta seca do compasso em A e abertura $\overline{AM}$ construímos a semicircunferência que encontra AB num ponto D. Ainda como no item d) do Exercício 4.6 construímos a perpendicular a AB por A que encontra a semi- circunferência com centro A e raio $\overline{AB}$ num ponto E. Observe que no triângulo retângulo MAE temos, pelo Teorema de Pitágoras que $\overline{ME} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$. Assim, com ponto seca do compasso em D e abertura $\overline{ME}$, obtemos em AB um ponto C tal que $\overline{AC} = a\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, como queríamos construir.





Capítulo 7

7.1. Dadas as razões $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}...$, elevando todos os termos à expoente (–1) temos

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}...,\Rightarrow\left(\frac{a}{p}\right)^{-1}=\left(\frac{b}{q}\right)^{-1}=\left(\frac{c}{r}\right)^{-1}=...\Rightarrow\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}=...,$$

mostrando assim o desejado.

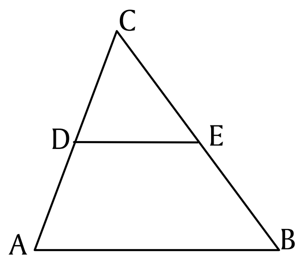
7.2. (1º. Modo) Dado $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}$ temos que a.q = b.p (1), somando bq nos dois lados de (1) temos a.q+b.q = b.p+b.q $\Rightarrow$ (a+b)q= b(p+q) $\Rightarrow$ $\frac{a+b}{b}=\frac{p+q}{q}$. De maneira análoga subtraímos bq em ambos lados de (1) e obtemos $\frac{a-b}{b}=\frac{p-q}{q}$.

(2º. Modo) Como $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}$, temos que $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$. Somando 1 a ambos os membros da igualdade obtemos $\frac{a}{b}+1=\frac{p}{q}+1$ e, assim, $\frac{a+b}{b}=\frac{p+q}{q}$. Analogamente, subtraindo 1, teremos $\frac{a-b}{b}=\frac{p-q}{q}$.

7.3. Se $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ então b é a média geométrica entre a e c. Seja a= 24 e c=6, logo $\frac{24}{b}=\frac{b}{6}\Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow$ b=12. Portanto, a média geométrica entre 24 e 6 é 12.

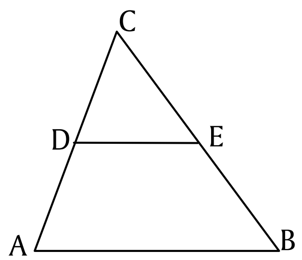
7.4. Pelo Exemplo 7.2, a congruência é uma semelhança e pela Proposição 7.7, a semelhança é uma relação de equivalência, assim uma relação transitiva.

7.5. (1º. Modo) Como D e E são os pontos médios dos lados AC e BC respectivamente temos $\overline{AC} = 2\overline{CD}$ e $\overline{BC} = 2\overline{CE}$, e do Teorema 5.12 temos que $\overline{AB} = 2\overline{DE}$, e portanto os lados do triângulo CDE são proporcionais aos lados do triângulo CAB, além disso, $C\hat{A}B \equiv C\hat{D}E$ e $C\hat{B}A \equiv C\hat{E}D$, pelo Exemplo 5.4

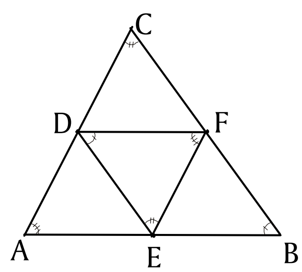


e $A\hat{C}B$ é comum aos dois triângulos. Portanto CDE$\sim$CAB, pela Definição 7.1.

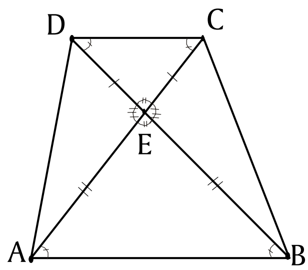
(2º. Modo) Como D e E são os pontos medios dos lados AC e BC por hipótese, pelo Teorema 5.12, DE é paralelo a AB e assim, pelo Exemplo 5.4, $C\hat{A}B \equiv C\hat{D}E$ e $C\hat{B}A \equiv C\hat{E}D$. Logo, pelo Corolário 7.9, CDE $\sim$CAB.



7.6. Seja ABC um triângulo e D, E e F os pontos médios de AC, AB e BC, respectivamente. Pelo Teorema 5.12 temos que $\overline{AB} = 2\overline{DF}$, $\overline{AC} = 2\overline{EF}$ e $\overline{CB} = 2\overline{DE}$, sendo assim, os lados do triângulo DEF, são proporcionais aos lados do triângulo BCA. Assim, pelo Teorema 7.11, temos que ABC $\sim$EFD.

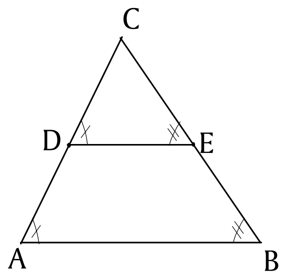


7.7. Como por hipótese AEB$\sim$DEC, temos que $B\hat{A}C \equiv E\hat{D}C$, mas como AB // CD então $B\hat{A}C \equiv E\hat{C}D$ pois são ângulos alternos-internos, assim $E\hat{D}C \equiv E\hat{C}D$, logo o triângulo DEC é isósceles, e assim DE $\equiv$ EC. Mas se AEB $\sim$DEC temos $A\hat{B}E \equiv E\hat{C}D \equiv B\hat{A}E$, e o triângulo AEB também é isósceles, logo AE $\equiv$ EB.

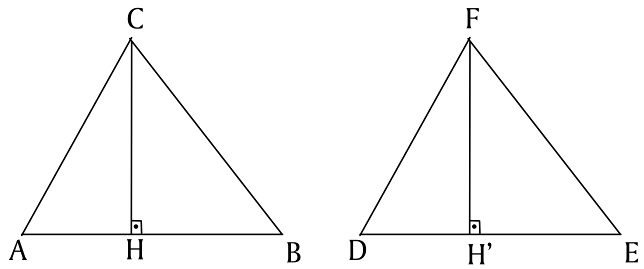


Temos também que $A\hat{E}D \equiv B\hat{E}C$, pois são opostos pelo vértice. Portanto, os triângulos AED e BEC são congruentes pelo Teorema 4.3. (Caso LAL), logo AD ≡ BC, como queríamos demonstrar.

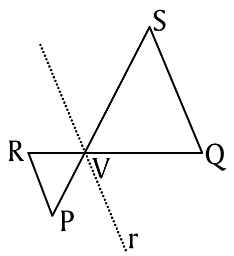
7.8. Sejam D e E os pontos de intersecção da reta dada com os lados do triângulo, como no desenho ao lado. Por hipótese, DE // AB, assim temos, pelo Exemplo 5.4 que $C\hat{D}E \equiv C\hat{A}B$ e $C\hat{E}D \equiv C\hat{B}A$, pois são ângulos correspondentes. Portanto, pelo Corolário 7.9, os triângulos CDE e CAB são semelhantes.



7.9. Sejam ABC e DEF triângulos semelhantes, CH e FH' as alturas correspondentes. Assim, por definição, temos $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{H} \equiv \hat{H}'$ pois são ângulos retos. Logo, pelo Corolário 7.9, ACH é semelhante a DFH'. Portanto, as alturas estão na mesma razão que os lados correspondentes.

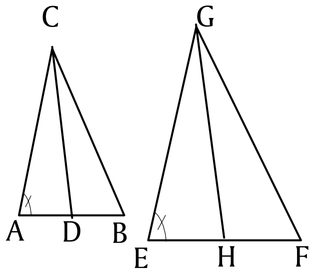


7.10. a) Como RP // SQ então $\hat{S} \equiv \hat{P}$ e $\hat{Q} \equiv \hat{R}$, pois são ângulos alternos-internos. Logo, pelo Corolário 7.9, temos o desejado.
b) Seja r a reta que passa por V e é paralela a SQ e a RP. Pelo Teorema 7.4 (Teorema de



Tales) temos que $\dfrac{\overline{RV}}{\overline{VQ}} = \dfrac{\overline{PV}}{\overline{VS}}$. Logo $\overline{RV}.\overline{VS} = \overline{VQ}.\overline{PV}$.

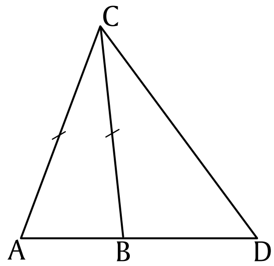
7.11. Suponhamos que ABC $\sim$EFG. Sejam CD e GH duas medianas de ABC e EFG, respectivamente. Temos, por hipótese, que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{1}{2}$, pois D e H são pontos médios de AB e EF, respectivamente. Assim, $\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$ Mas, por definição de semelhança de triângulos, $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EH}}$.



Logo, pelo Teorema 7.10 temos que ACD$\sim$EGH e portanto,

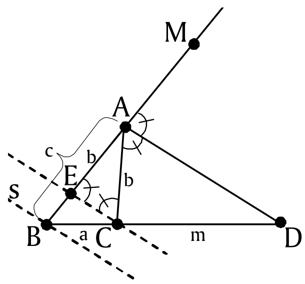
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}.$$

7.12. A afirmação é falsa. De fato, considere um triângulo isósceles ABC com base AB. Seja D um ponto em S_{AB} tal que B está entre A e D. Considere a semi-reta S_{CD}, temos que CD é comum a ACD e a BCD e AC $\equiv$ BC, assim nos triângulos ACD e BCD temos dois lados proporcionais com razão 1, ou seja,



$\frac{\overline{CD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = 1$. Além disso, $\hat{D}$ é comum aos dois triângulos ACD e BCD, no entanto estes triângulos não são congruentes pois $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} > 1$.

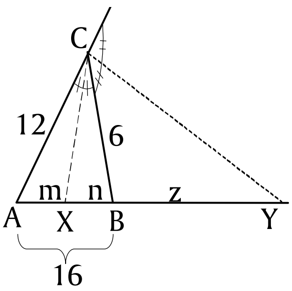
7.13. Seja ABC um triângulo escaleno e, sem perda de generalidade, consideremos o ângulo externo CÂM, onde A está entre B e M, e a bissetriz S_{AD} de CÂM, onde C está entre B e D. Temos que r_{AD} não é paralela a r_{BC} pois, caso contrário, teríamos um triângulo isósceles de base BC (demonstração do Teorema 7.5). Assim, consideremos



a reta r_{CE} paralela a r_{AD} por C. Como r_{CE} // AD temos $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}E$ (ângulos alternos internos) e $M\hat{A}D \equiv C\hat{E}A$ (ângulos correspondentes). Por hipótese, $M\hat{A}D \equiv D\hat{A}C$, assim $A\hat{C}E \equiv C\hat{E}A$, ou seja, AEC é isósceles. Logo, $\overline{AE} = b$ e, aplicando o Teorema 7.2 com as transversais AB e BD nas paralelas AD, EC e s, obtemos o resultado desejado.

7.14. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = 16$, $\overline{AC} = 12$, $\overline{BC} = 6$ e m a distância de X a A e n a distância de X a B. Primeiramente determinaremos m. Pelo Teorema 7.5 temos

$$\frac{12}{6} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$



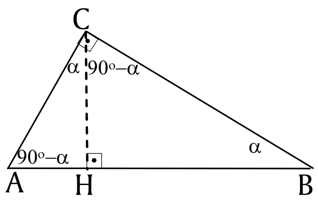
Sabemos que m + n = 16, então

$$n = 16 - m. \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2) temos $\frac{m}{2} = 16 - m \Rightarrow m = 32 - 2m \Rightarrow 3m = 32 \Rightarrow m = \frac{32}{3}$.

Logo a distância de X a A é $\frac{32}{3}$. Seja z a distância de Y a B, pelo Exercício 7.13 temos $\frac{m+n+z}{z} = \frac{12}{6}$, mas como n+m = 16 temos $\frac{16+z}{z} = 2 \Rightarrow 2z = 16 + z \Rightarrow z = 16$, logo a distância de A a Y é 32.

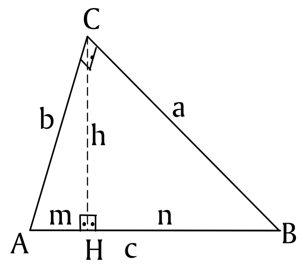
7.15. Mostremos inicialmente que AHC~CHB. De fato, como os triângulos tem os três ângulos internos congruentes, temos, pelo Teorema 7.8 que os triângulos são semelhantes. Mostremos que AHC~ACB. Como $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos, $m(\hat{C}) = 90^{o}$ e



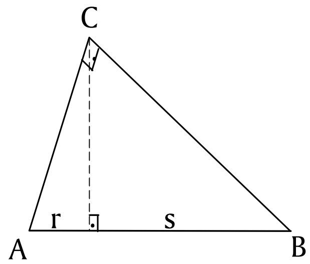
$m(C\hat{H}A) = 90^{o}$, pelo Corolário 7.9, os dois triângulos são semelhantes. Agora, pela Proposição 7.3 é imediato que CHB ~ACB.

7.16. **a)** Pelo Exercício 7.15, temos $AHC \sim CHB$. Assim $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$.

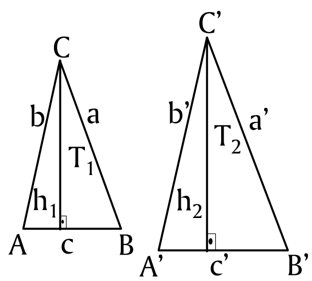
b) Como $CHB \sim ACB$ (Exercício 7.15) então $\frac{a}{c} = \frac{n}{a}$. Como $AHC \sim ACB$ (Exercício 7.15), então $\frac{b}{c} = \frac{m}{b}$.



7.17. Pelo Exercício 7.15, temos que $h^2 = r.s$, ou seja, $h = \sqrt{r.s}$. Como $\overline{AB} = r + s$, temos, pelo Teorema 6.8, que $A(ABC) = \sqrt{r.s}.\frac{(r+s)}{2}$.



7.18. Sejam $ABC = T_1$ e $A'B'C' = T_2$ triângulos semelhantes de alturas medindo h_1 e h_2, respectivamente, conforme desenho ao lado. Então, por definição e Exercício 7.9, $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h_1}{h_2} = k$. Pelo Teorema 6.8, $A(T_1) = \frac{c.h_1}{2}$ e $A(T_2) = \frac{c'.h_2}{2}$. Assim



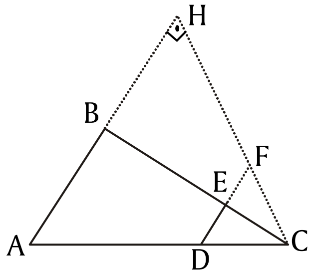
$$\frac{A(T_1)}{A(T_2)} = \frac{\frac{c.h_1}{2}}{\frac{c'h_2}{2}} = \frac{c.h_1}{c'h_2}.$$

Como $c = c'.k$ e $h_1 = h_2.k$ pois T_1 e T_2 são semelhantes, temos que

$$\frac{A(T_1)}{A(T_2)} = \frac{c.h_1}{c'.h_2} = \frac{c'.k.h_2.k}{c'.h_2} = k^2.$$

7.19. Seja ABC~A'B'C', por hipótese, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=5$. Como A(ABC)=6, pelo Exercício 7.18, $\dfrac{A(ABC)}{A(A'B'C')}=(5)^2$, ou seja, A(A'B'C') = 25.6 = 150cm^2.

7.20. Pelo Corolário 7.9, ABC~DEC, pois $A\hat{B}C \equiv D\hat{E}C$ e $B\hat{A}C \equiv E\hat{D}C$ (ângulos correspondentes) e portanto $\overline{AB}=3.\overline{DE}$, uma vez que $\overline{AD}=2.\overline{CD}$. Pelo Exercício **7.9**, temos $\overline{CH}=3.\overline{CF}$. Assim, A(ABC)= $\dfrac{\overline{AB}.\overline{CH}}{2}$ e

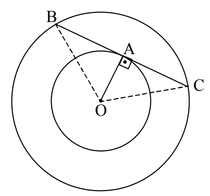


$$A(CDE) = \frac{\frac{\overline{AB}}{3}.\frac{\overline{CH}}{3}}{2} = \frac{1}{9}.\frac{\overline{AB}.\overline{CH}}{2}.$$

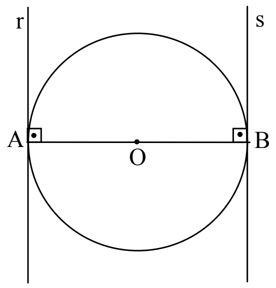
Logo, A(ABC)=9.A(CDE). Se A(ABDE)=40 e então A(ABC) – A(CDE)=40. Portanto, A(ABC) – $\dfrac{A(ABC)}{9}=40 \Rightarrow$ 8.A(ABC) = 360 $\Rightarrow$ A(ABC) = 45cm^2.

Capítulo 8

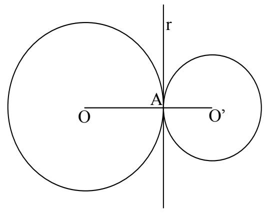
8.1. De fato, consideremos o desenho ao lado, onde A é o ponto de tangência e BC é a corda dada. Pela Proposição 8.8, na circunferência menor temos $AO \perp BC$. Logo, pela Proposição 8.4, na circunferência maior, temos $\overline{AB} = \overline{BC}$.



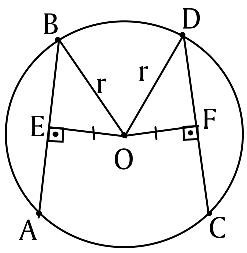
8.2. Sejam AB o diâmetro de uma circunferência de centro O, r uma reta tangente a circunferência por A e s uma tangente por B. Pela Proposição 8.8, $r \perp OA$ e $s \perp OB$. Logo r e s são perpendiculares a AB e, portanto paralelas pelo Corolário 4.15.



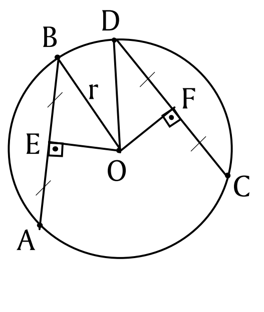
8.3. Seja A o ponto onde as circunferências se tangenciam e r a tangente comum as duas circunferências no ponto A. Sabemos, pela Proposição 8.8, que OA ⊥ r e O'A ⊥ r. Suponhamos por absurdo que O, A e O' não são colineares. Então as retas AO e O'A são distintas e perpendiculares a r em A, o que contradiz o Teorema 3.22. Portanto O, A e O' são colineares.



8.4. Sejam AB e CD cordas de uma circunferência de centro O e raio r, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ as distâncias de AB a O e de CD a O, respectivamente. Suponhamos que $\overline{OE} = \overline{OF}$, assim, pela Proposição 8.4, $\overline{BE} = \overline{AE}$ e $\overline{DF} = \overline{CF}$, pois OE e OF são perpendiculares

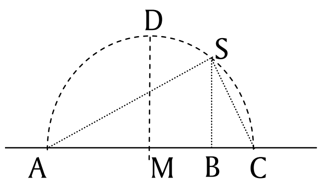


a AB e a CD, respectivamente. Logo, pelo Teorema 4.17 (Caso LLA$_\square$), os triângulos OEB e OFD são congruentes. Assim, $\overline{BE} = \overline{DF}$ e, portanto, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Reciprocamente, consideremos AB e CD cordas congruentes, E e F os pés das perpendiculares por AB e CD, respectivamente, passando por O. Pela Proposição 8.4, E e F são pontos médios de AB e CD, respectivamente. Como os triângulos OEB e OFD são retângulos, pelo Teorema 4.17 (Caso LLA$_\square$), temos que OEB ≡ OFD, pois ambos têm hipotenusas e um dos catetos



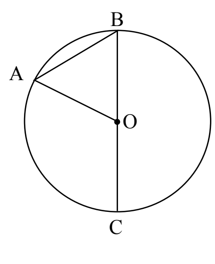
congruentes. Assim, OE ≡ OF e, portanto, as cordas são eqüidistantes de O. Observe que em ambas as demonstrações podem ter AB e CD em circunferências congruentes distintas.

8.5. Numa reta r qualquer tomemos um ponto A. Utilizando o Axioma IV.1, marcamos em r pontos B e pontos C tais que $\overline{AB}$ = a e $\overline{BC}$ = b. Encontramos a mediatriz de AC conforme Exercício 4.6 e traçamos a circunferência γ de centro M e raio $\overline{AM}$. Traçamos a perpendicular s por B,

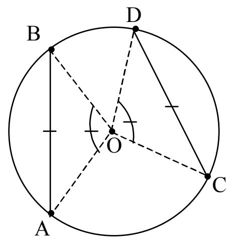


conforme Exercício 4.6. Seja D = γ ∩ s. Pelo Corolário 8.16, o triângulo ACD é retângulo em D. Pelo item a) do Exercício 7.16, segue o resultado.

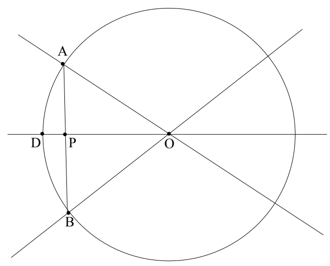
8.6. Como AB ≡ OC então o triângulo OAB é eqüilátero pois $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC}$. Assim temos, m($\widehat{AB}$)= 60º. Como o segmento BC é um diâmetro então m($\widehat{BC}$) = 180º e, portanto, m($\widehat{AC}$)= 180º – 60º = 120º.



8.7. Sejam AB e DC duas cordas congruentes, como AO, OB, OC e OD são raios então estes são todos congruentes. Assim, pelo Teorema 4.11 (Caso LLL), ABO ≡ DCO, e portanto AÔB ≡ CÔD, como queríamos demonstrar. Reciprocamente, suponha-mos que AÔB ≡ CÔD, como AO, OB, OC e OD são raios da circunferência, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), ABO ≡ DCO, portanto AB ≡ CD. As mesmas demonstrações valem para as cordas AB e DC em circunferências congruentes.



8.8. Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Consideremos r_1 e r_2 retas distintas que passam pelo ponto O. Em r_1 e r_2 existem dois pontos A e B, respectivamente, tais que $\overline{OA} = \overline{OB} = r$. Logo, A, B ∈ C. Consideremos agora o segmento AB, que, pelo Teorema 2.13, possui infinitos pontos. Para cada ponto P de AB considere a reta OP. Disto segue que existem infinitas retas pelo ponto O e que contém um ponto de AB. Para cada uma dessas retas considere o ponto D tal que $\overline{OD} = r$. Logo, D ∈ C e como os pontos são distintos obtemos um número infinito de pontos pertencentes a circunferência C, como queríamos demonstrar.



8.9. Pelo Corolário 8.16, temos que m(Â) = 35°. Pela Proposição 8.15, temos m(CÔB)=2 × 35°= 70°.

8.10. As medidas dos arcos serão:

$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BC}) = 160°$,

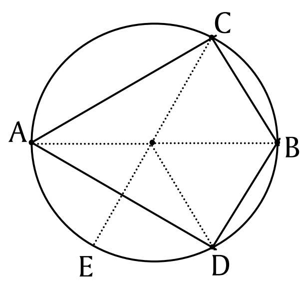
$m(\widehat{CD}) = 2.m(\hat{A}) = 150°$ e

$m(\widehat{BD}) = m(\widehat{CD}) - m(\widehat{BC}) = 80°$.

Seja CE um diâmetro, temos

$m(\widehat{AD}) = m(\widehat{AE}) + m(\widehat{ED})$.

Como CE é um diâmetro temos



$$m(\widehat{AE}) = 180° - m(\widehat{AC}) = 90° \text{ e}$$

$$m(\widehat{ED}) = 180° - m(\widehat{CD}) = 180° - m(\widehat{CD}) = 180° - 150° = 30°.$$

Logo, $m(\widehat{AD}) = 90^o + 30^o = 120^o$. Quanto as medidas dos outros ângulos, pela Proposição 8.15, temos

$$m(\hat{B}) = m(\widehat{AC})/2 + m(\widehat{AD})/2 = 45^o + 60^o = 105^o,$$

$$m(\hat{C}) = m(\widehat{AD})/2 + m(\widehat{BD})/2 = 60^o + 40^o = 100^o,$$

$$m(\hat{D}) = m(\widehat{AB})/2 = 80^o,$$

$$m(A\hat{C}D) = m(\widehat{AD})/2,$$

$$m(B\hat{C}D) = m(\hat{C}) - m(A\hat{C}D) = 40^o,$$

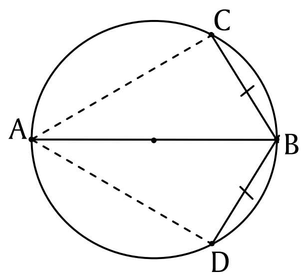
$$m(B\hat{D}C) = m(\widehat{BC})/2 = 35^o \text{ e}$$

$$m(A\hat{D}C) = m(\hat{D}) - m(B\hat{D}C) = 45^o.$$

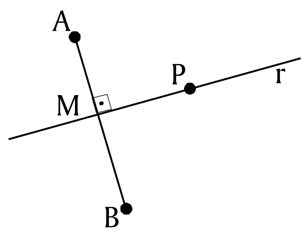
8.11. Pelo Corolário 8.16, temos

$$m(A\hat{C}B) = m(A\hat{D}B) = 90^o$$

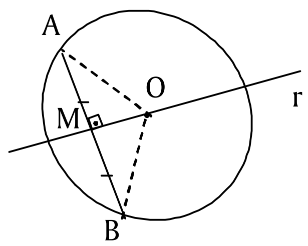
e pelo Teorema 4.17 (Caso $LLA_{\square}$), temos ABC congruente a ABD.

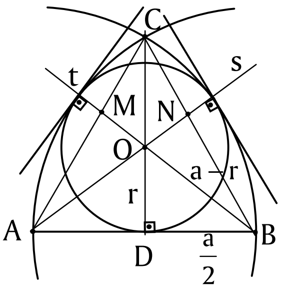


8.12. a) Sejam AB um segmento de reta qualquer e r a mediatriz de AB. Tomamos em r um ponto P qualquer. Os triângulos APM e BPM são congruentes pelo caso LAL. Assim AP e BP são congruentes. Como P foi tomado arbitrariamente, temos o resultado.



b) Sejam C uma circunferência de centro O, AB uma corda de C e r a mediatriz do segmento AB interceptando AB no ponto médio M. Suponhamos que r não passe por O. Pela Proposição 8.5, sabemos que $OM \perp AB$. Mas, por hipótese, r também e perpendicular a AB em M. Assim temos duas retas perpendiculares a AB passando pelo ponto M, o que é um absurdo. Logo, r passa por O.

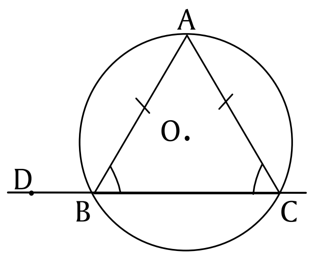




8.13. A circunferência inscrita e os arcos dados são tangentes, logo, pelo Exercício 8.3, seu centro, o ponto de tangência e o centro de cada arco são colineares. Desta forma, ligamos A ao ponto médio N da corda BC e obtemos uma reta s que contém o centro O da circunferência inscrita e ligando B ao ponto médio M da corda AC obtemos uma reta t que contém O. Logo, $r \cap s = O$. Seja D o ponto médio de AB. Como O eqüidista de A e B , a reta OD é a mediatriz de AB. Assim, pelo Proposição 8.7, OD é raio da circunferência inscrita cuja medida é $r = \overline{OD}$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras temos

$$(a-r)^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 - 2ar + r^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ar = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow 2ar = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow r = \frac{3a^2}{8a} \Rightarrow r = \frac{3a}{8}.$$



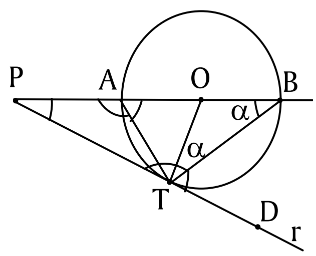
8.14. Sabemos que o ângulo externo $D\hat{B}A$ é igual a soma dos outros dois não adjacentes a ele. Logo, $m(D\hat{B}A) = m(A\hat{C}B) + m(C\hat{A}B)$. Assim, temos que a diferença entre o ângulo externo da base e o ângulo da base é

$$\left(m(A\hat{C}B) + m(C\hat{A}B)\right) - m(A\hat{C}B) = m(C\hat{A}B).$$

Pela Proposição 8.15, temos que

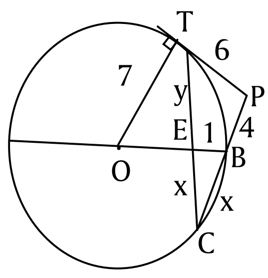
$$m(\widehat{BC}) = 2.\ m(C\hat{A}B),$$

mostrando o desejado



8.15. Seja P um ponto exterior a uma circunferência de centro O. Traçamos a reta PO que, pela Proposição 8.10, encontra a circunferência em dois pontos, diagamos A e B. Por P traçamos uma tangente a circunferência que a encontra num ponto T. Pela Proposição 8.8, o raio OT e a reta PT são perpendiculares. Pela Proposição 8.15,

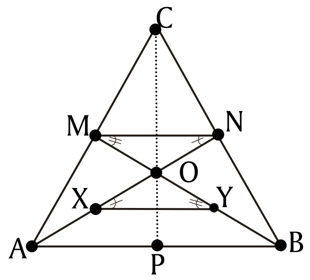
$m(B\hat{T}A)=90^o$. Se $m(O\hat{T}B)=\alpha$, então $m(O\hat{B}T)=\alpha$, pois TOB é isósceles. Temos $m(O\hat{T}A)=90^o-\alpha$ e $m(O\hat{T}P)=90^o-m(O\hat{T}A)$, assim $m(A\hat{T}P)=\alpha$. Assim, pelo Corolário 7.9, os triângulos PTA e PBT são semelhantes, pois possuem dois ângulos congruentes, a saber, $A\hat{T}P \equiv P\hat{B}T$ e $\hat{P}$ comum. Portanto, $\dfrac{\overline{PT}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Rightarrow \overline{PT}^2=\overline{PA}.\overline{PB}$.



8.16. Pelo Exercício 8.15, temos que $\overline{PT}^2=\overline{PB}.\overline{PC}$. Assim

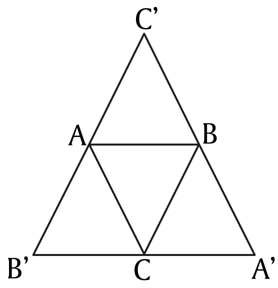
$$6^2=4.(4+x) \Rightarrow 36=16+4x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x=20 \Rightarrow x=5.$$

Pelo Teorema 8.17, temos que $\overline{EA}.\overline{EB}=\overline{EC}.\overline{ET}$. Como $\overline{AB}=14$ pois AB=2.R e $\overline{EB}=1$, temos que $\overline{EA}=13$, logo $13.1=5.y \Rightarrow\ y=\dfrac{13}{5}$. Portanto, os valores de x e y são respectivamente 5 e $\dfrac{13}{5}$.



8.17. a) Sejam ABC um triângulo qualquer, M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. As medianas AN e BM se interceptam num ponto O interno a região triangular, pois como o segmento NA é interno ao triângulo ABC, AN intercepta qualquer segmento com extremos em AB e AC, num ponto interno. Seja X o ponto médio de OA e Y o ponto médio de OB. Pelo Teorema 5.12, XY e AB são paralelas e $\overline{XY}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Também, pelo Teorema 5.12 MN e AB são paralelas e $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Assim MN e XY são paralelas e $\overline{MN}=\overline{XY}$. Logo, $O\hat{M}N \equiv O\hat{Y}X$ e $O\hat{N}M \equiv O\hat{X}Y$, pois são ângulos alternos internos. Portanto pelo caso ALA, $MNO \equiv YXO$ e daí NO $\equiv$ OX, donde segue que $2\overline{ON}=\overline{OA}$ e $2\overline{OM}=\ \overline{OB}$. Assim O divide as medianas NA e BM na razão 2:1. Por último observemos que de maneira análoga ao que fizemos acima, se tomarmos P o ponto médio de AB, a mediana CP divide o segmento AN numa razão tal que o maior é o dobro do menor, e, portanto CP passa por O, donde segue que as medianas se interceptam num único ponto.

b) Seja ABC um triângulo qualquer. Traçamos as retas: por A, paralela à BC; por B, paralela à AC e por C paralela à AB. Pelo Corolário 5.2, estas paralelas se interceptam duas a duas em pontos que chamaremos de A', B' e C' como mostra o desenho ao lado. Da maneira como construímos, é fácil ver que os quadriláteros ABCB', ABA'C e ACBC' são paralelogramos. Portanto, AB ≡ A'C ≡ B'C, AC ≡ A'B ≡ C'B e BC ≡ B'A ≡ C'A. Por outro lado, as alturas do triângulo, sendo perpendiculares a AB, AC e BC, pelos pontos C, B e A, respectivamente, são perpendiculares também a A'B', A'C' e B'C', nestes pontos. Mas estas perpendiculares são mediatrizes do triângulo A'B'C' que, pelo Corolário 8.22, se interceptam num único ponto. Portanto as alturas do triângulo ABC se interceptam num único ponto.



8.18. A medida será $\frac{2\pi R}{G}$, pela Definição 8.37. De fato, se percorrermos a circunferência toda, teremos um ângulo medindo $2\pi G$. Assim, $2\pi G$ corresponde a 2π rad e $2\pi R$ corresponde a x rad, ou seja, $2\pi Gx = 4\pi^2 R$, assim $x = \frac{2\pi R}{G}$.

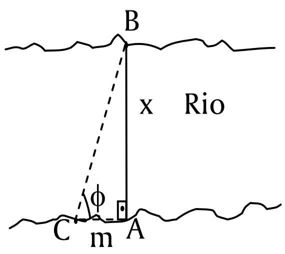
8.19. Se o comprimento de C é $2\pi R$, então o comprimento de C' é πR. Logo, $A(C) = \pi R^2$ e $A(C') = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi\frac{R^2}{4}$. Portanto a área de C é quatro vezes a área de C'.

8.20. A área do primeiro desenho será a área da semi-circuferência de raio $\frac{a}{2}$ mais a metade da área do segundo desenho. A área do segundo desenho será a área do quadrado de lado a menos a circunferência de raio $\frac{a}{2}$, ou seja, $A_2 = a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{\pi.a^2}{4} = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. Logo, $A_1 = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\pi.a^2}{8} + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{\pi.a^2}{8}\right) = \frac{a^2}{2}$. A área do terceiro desenho será a área da semi-circunferência de raio $\frac{b}{2}$ menos a área da semi-circunferência de raio $\frac{b}{4}$. Assim,

$$A = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{b}{6}\right)^2}{2} = \frac{\pi.b^2}{8} - \frac{\pi.b^2}{72} = \frac{\pi.b^2}{8}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi.b^2}{8}.\frac{8}{9} = \frac{\pi.b^2}{9}.$$

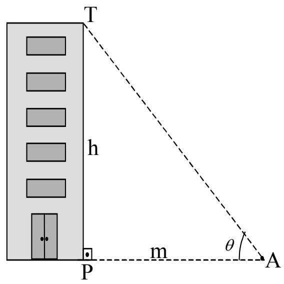
Capítulo 9

9.1. Em primeiro lugar, fixemos um ponto A na margem de acesso e um ponto B na outra margem, tal que AB seja perpendicular as duas margens (isto deve ser feito de forma aproximada) . Em seguida fixemos um ponto C na perpendicular a AB no ponto A com distância m de A. Obtemos a medida do ângulo ϕ que CA forma com CB. Assim temos



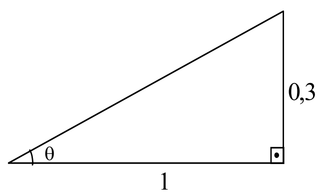
tg $\phi = \dfrac{x}{m}$. Portanto x = m.tg ϕ. Logo, a largura do rio será m.tg ϕ.

Seja T um ponto do topo do edifício e P o pé da perpendicular baixada por T. Tomemos um ponto A a uma distância m do edifício. Em seguida calculamos o ângulo θ entre as retas AP e AT. Assim teremos tg $\theta = \dfrac{h}{m}$ e, portanto, h=m.tg θ.



9.2. O problema pode ser ilustrado pelo desenho ao lado. Assim,

$$tg\theta = \frac{\frac{3}{10}}{1} \Rightarrow tg\theta = \frac{3}{10} \Rightarrow \theta \approx 16{,}7^\circ .$$



9.3. Calculemos primeiramente $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{20}$. Pelo item b) da Proposição 9.3 e pelo Exemplo 9.4 temos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{20} = \operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{10}}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} .$$

Pelo Teorema 9.1, temos

$$\cos^2\frac{\pi}{20}+\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{20}=1 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{20}=1-\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{20}=\sqrt{\frac{8-4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{20}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}.$$

Também,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{20}}{\cos\frac{\pi}{20}}=\frac{\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}}{\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}\ .$$

Calculemos agora $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$. Pelo item a) da Proposição 9.3 e pelo Exemplo 9.4 temos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}=\operatorname{sen}2\frac{\pi}{10}=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}.$$

Pelo Teorema 9.1, temos

$$\cos^2\frac{\pi}{5}=1-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{5} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\frac{\left(\sqrt{5}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}{64}}\ =$$

$$=\cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{64-\left(\sqrt{5}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}{64}}\ .$$

Assim, $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}=\frac{\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}{\sqrt{\frac{64-\left(\sqrt{5}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}{64}}}\ .$$

Pela Proposição 9.2, $\text{sen}\dfrac{3\pi}{10} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{10}\right) = \cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{3\pi}{10} = \text{sen}\dfrac{\pi}{5}$ e $\text{tg}\dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{1}{\text{tg}\dfrac{\pi}{5}}$. Calculemos agora $\text{sen}\dfrac{2\pi}{5}$. Pelo item a) da Proposição 9.3, temos $\text{sen}\dfrac{2\pi}{5} = \text{sen}2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 2\text{sen}\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}$ e, pelo Teorema 9.1, temos

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1-\text{sen}^2\frac{2\pi}{5}} = \sqrt{1-\left(2\text{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\right)^2},$$

$$\text{tg}\frac{2\pi}{5} = \frac{\text{sen}\dfrac{2\pi}{5}}{\cos\dfrac{2\pi}{5}} = \frac{2\text{sen}\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\left(2\text{sen}\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^2}}.$$

9.4. Numa reta r construímos um segmento AB qualquer. Seja D um ponto em AB tal que AD é o segmento áureo de AB, ou seja, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ (*). Tomamos a medida de AD e construímos o triângulo isósceles BDC onde os lados BC e CD tem a medida de AD, logo m($\hat{A}$) = m($A\hat{C}D$) = α e m($\hat{B}$) = m($C\hat{D}B$) = β. Pelo Teorema 7.10, os triângulos ABC e CBD são semelhantes, pois $\hat{B}$ é comum e, pela relação (*), $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$. Assim, m($B\hat{C}D$) = m($\hat{A}$) = α. Mas, pelo Teorema 4.8, $\beta = 2\alpha$, logo, pelo Teorema 5.6, m($\hat{A}$) + m($\hat{B}$) + m($\hat{C}$) = 180º, assim $\alpha =$ 36º e $\beta = 2\alpha = 72$º.

9.5. a) Dado $\text{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Pela Relação Fundamental, temos

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1-\frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$$

e, por definição, $\text{tg}\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \text{tg} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg} = \dfrac{3}{4}$.

b) (1º. Modo) Por definição, temos

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow 5 = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \text{sen}\theta = 5\cos\theta. \qquad (1)$$

Assim, pela relação fundamental, vem

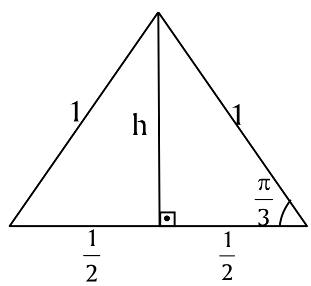
$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow (5\cos\theta)^2 + \cos^2\theta = 25\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$$

$$26\cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{26}}.\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{26}}{26}.$$

Assim, de (1) segue que, $\text{sen}\,\theta = 5\cos\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = 5.\dfrac{\sqrt{26}}{26}$.

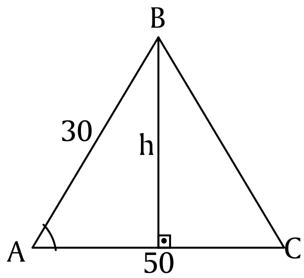
(2º. Modo) Pelo Teorema 9.1, temos $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ e pelo item a) temos $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2\theta}$. Logo, $\text{sen}^2\theta = 1 - \dfrac{1}{1+\text{tg}^2\theta} = \dfrac{\text{tg}^2\theta}{1+\text{tg}^2\theta}$.

9.6. Considerando o triângulo equilátero ao lado, por definição temos $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ e $\text{sen}\dfrac{\pi}{3} = h$. Assim, do Teorema 6.8, temos que $A_t = \dfrac{1.h}{2} \Rightarrow A_t = \cos\dfrac{\pi}{3}.\text{sen}\dfrac{\pi}{3}$.



9.7. Consideremos o triângulo ABC ao lado. Como $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ então, pelo Teorema 9.1, temos que $\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$. Logo,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{30} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 18.$$



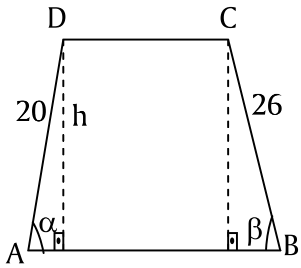
Pelo Teorema 6.8, $A(ABC)=\dfrac{50.18}{2}=450$.

9.8. Consideremos o trapézio ao lado. Por definição, temos

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{h}{20}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{h}{20}\Rightarrow h=10.$$

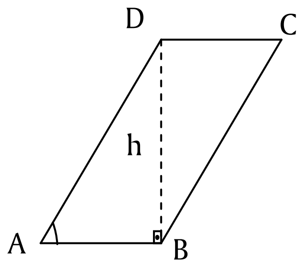
Por outro lado,

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{h}{26}\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=\frac{10}{26}\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=\frac{5}{13}.$$



9.9. Consideremos o paralelogramo ABCD conforme desenho ao lado. Como tg $\alpha=1$, obtemos $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{5}\Rightarrow 1=\frac{h}{5}\Rightarrow h=5$. Assim, pelo Teorema 6.8, temos

$$A(P)=b.h=5.5=25.$$



9.10. a) Temos $\cos^2\theta=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$. Mas, pelo Teorema 9.1, temos que $1=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta$. Assim,

$$\cos^2\theta=\frac{1}{\dfrac{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$$

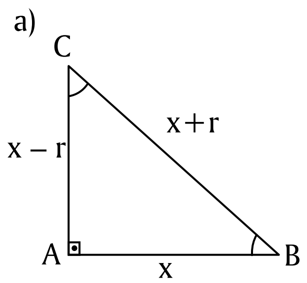
b) Temos $\operatorname{sen}^2\theta=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}.\dfrac{\cos^2\theta}{1}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$. Mas, pelo Teorema 9.1, temos $1=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta$. Assim,

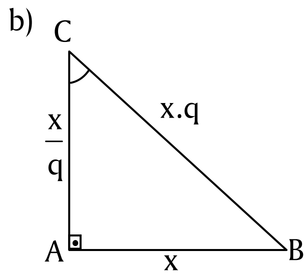
$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

9.11. **a)** Consideremos o triângulo retângulo ABC abaixo e suponhamos que $\hat{C}$ seja o maior ângulo agudo. Seja $\overline{AB} = x$. Como os lados estão em progressão aritmética então $\overline{AC} = x - r$ e $\overline{BC} = x + r$, onde r é a razão da progressão aritmética. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(x+r)^2 = x^2 + (x-r)^2 \Rightarrow x^2 + 2xr + r^2 =$$
$$= x^2 + x^2 - 2xr + r^2 \Rightarrow x^2 = 4xr \Rightarrow r = \frac{x}{4}.$$

Como $\hat{C}$ é o maior ângulo agudo, $\cos\hat{C} = \dfrac{x-r}{x+r} = \dfrac{x - \frac{x}{4}}{x + \frac{x}{4}} = \dfrac{\frac{3x}{4}}{\frac{5x}{4}} = \dfrac{3}{5}$.





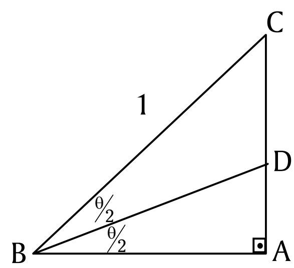
b) Consideremos o triângulo retângulo ABC do desenho acima. Seja $\overline{AB} = x$. Como os lados estão em progressão geométrica então $\overline{AC} = \dfrac{x}{q}$ e $\overline{BC} = xq$, onde q é a razão da progressão geométrica. Pelo Teorema de Pitágoras, temos,

$$(xq)^2 = \left(\frac{x}{q}\right)^2 + x^2 \Rightarrow x^2q^2 = \frac{x^2}{q^2} + x^2 \Rightarrow x^2q^2 = x^2\left(\frac{1}{q^2} + 1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{q^2} + 1 \Rightarrow q^2 = \frac{1+q^2}{q^2} \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0.$$

Seja $q^2 = y$ (1). Assim $y^2 - y - 1 = 0$, resolvendo a equação em y obtemos: $y_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $y_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Substituindo y_1 (solução positiva) em (1) temos que $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Portanto, como $\hat{C}$ é o maior ângulo agudo pois se opõe ao maior cateto, temos,

$$\cos\hat{C} = \frac{\frac{x}{q}}{xq} = \frac{x}{q}.\frac{1}{xq} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

9.12. a) Consideremos o triângulo ABC, conforme desenho ao lado. Seja D o ponto da bissetriz de $\hat{B}$ que intercepta AC. Pelo Teorema 7.5 (Teorema da Bissetriz Interna) temos $\dfrac{1}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$, ou seja, $\overline{CD} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$. Como $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ temos $\overline{CD} = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$. Por outro lado,



$\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD}$. Pelo desenho dado, temos que $\operatorname{sen}\theta = \overline{AC}$, $\cos\theta = \overline{AB}$.

Logo, $\overline{CD} = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta.\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$. Como $\overline{CD} = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ obtemos,

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta.\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta.\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta) = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}.$$

b) Como, no Exemplo 9.3, já foi calculado os valores para $\dfrac{\pi}{6}$ e, além disso, temos $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{\pi}{6}}{2}$, pela Proposição 9.3 e pelo item a), obtemos:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Pelo Teorema 9.1, temos

$$\cos^2\frac{\pi}{12} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{12} = 1 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{4-2+\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Também,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

9.13. Em ambos os itens vamos supor $\theta \neq 0$, pois caso contrário o resultado é imediato.

a) Pelo exercício anterior, temos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = t \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = t + t\cos\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = t + t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\operatorname{sen}\theta - t)^2 = (t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta})^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta - 2t\operatorname{sen}\theta + t^2 = t^2(1-\operatorname{sen}^2\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta - 2t\operatorname{sen}\theta + t^2 = t^2 - t^2\operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta - 2t\operatorname{sen}\theta + t^2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta - 2t + t^2\operatorname{sen}\theta) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta - 2t + t^2\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta + t^2\operatorname{sen}\theta = 2t \Rightarrow \operatorname{sen}\theta(1+t^2) = 2t \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$

b) Também, pelo exercício anterior, temos

$\dfrac{\text{sen}\theta}{1+\cos\theta} = t \Rightarrow \text{sen}\theta = t + t\cos\theta \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2\theta} = t + t\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)^2 = (t + t\cos\theta)^2 \Rightarrow 1-\cos^2\theta = t^2 + 2t^2\cos\theta + t^2\cos^2\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 + 2t^2\cos\theta + t^2\cos^2\theta + \cos^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t^2-1) + 2t^2\cos\theta + (t^2+1)\cos^2\theta = 0.$

cuja solução é $\cos\theta = \dfrac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4(t^4-1)}}{2(t^2+1)} = \dfrac{-2t^2 \pm 2}{2(t^2+1)}$. Tomando a raiz positiva, pois $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, temos $\cos\theta = \dfrac{2(1-t^2)}{2(t^2+1)} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$.

c) Sabemos que $\text{tg}\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$. Logo, $\text{tg}\theta = \dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}.\dfrac{1+t^2}{1-t^2} = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

9.14. Se $\text{sen}\theta.\cos\theta = \dfrac{2}{5}$, então $\text{sen}\theta = \dfrac{2}{5\cos\theta}$. Assim da relação fundamental, temos $\cos^2\theta + \left(\dfrac{2}{5\cos\theta}\right)^2 = 1$, ou seja, $\cos^2\theta = 1 - \dfrac{4}{25\cos^2\theta}$, o que implica que $\cos^2\theta = \dfrac{25\cos^2\theta - 4}{25\cos^2\theta}$. Logo, $5\cos^4\theta - 25\cos^2\theta + 4 = 0$. Considerando $\cos^2\theta = x \quad (1)$, obtemos $25x^2 - 25x + 4 = 0$. Resolvendo a equação em x temos $x_1 = \dfrac{4}{5}$ e $x_2 = \dfrac{1}{5}$. Substituindo $x_1 = \dfrac{4}{5}$ e $x_2 = \dfrac{1}{5}$ em (1) vem

$$\cos^2\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \qquad (2)$$

e

$$\cos^2\theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}. \qquad (3)$$

Substituindo (2) na Relação Fundamental, temos

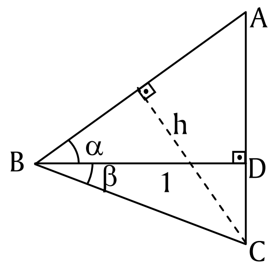
$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \frac{20}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\theta = \frac{5}{25} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Substituindo (3) na Relação Fundamental, temos

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \frac{2}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\theta = \frac{20}{25} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Assim, obtemos

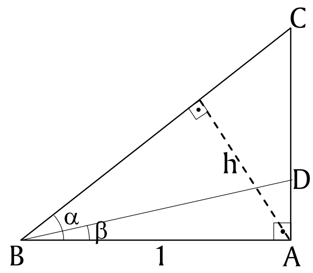
$$\text{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \text{tg}\theta = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.\frac{5}{\sqrt{5}} = 2\,.$$



9.15. a) Consideremos o triângulo ABC no primeiro desenho ao lado. Seja h a altura relativa à base AB e BD a altura relativa à AC. Do desenho temos as seguintes relações: $\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\overline{AB}}$, $\text{sen}\,\beta = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$ e $\cos\beta = \frac{1}{\overline{BC}}$. Pelo Teorema 6.8, temos que $A(ABC) = \frac{\overline{AC}.1}{2}$, e, por outro lado, $A(ABC) = \frac{\overline{AB}.h}{2}$. Logo, $\frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AB}.h}{2}$ e portanto $h = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. Assim temos

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{h}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}.\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}+\overline{DC}}{\overline{AB}.\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}.\overline{BC}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}.\overline{BC}} =$$

$$= \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}.\frac{1}{\overline{BC}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}.\frac{1}{\overline{AB}} = \text{sen}\,\alpha.\cos\beta - \text{sen}\,\beta.\cos\alpha,$$



b) Consideremos o desenho ao lado. Seja h a altura do triângulo BCD rela-tiva a base BC. Pelo desenho temos as se-guintes relações: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\overline{BC}}$, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ e $\cos\beta = \dfrac{1}{\overline{BD}}$.

Assim, pelo Teorema 6.8, temos que $A(BCD) = \dfrac{\overline{BC}.h}{2}$. Por outro lado,

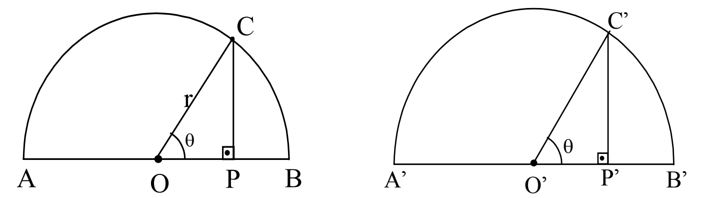
$$A(BCD) = A(ABC) - A(ABD) = \frac{\overline{AC}}{2} - \frac{\overline{AD}}{2}.$$

Logo, $\dfrac{\overline{BC}.h}{2} = \dfrac{\overline{AC}}{2} - \dfrac{\overline{AD}}{2} \Rightarrow h = \dfrac{\overline{AC} - \overline{AD}}{2}$. Assim, temos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{h}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AD}}{\overline{BC}.\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}.\overline{BD}} - \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}.\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.\frac{1}{\overline{BD}} - \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.\frac{1}{\overline{BC}} =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha.$$

9.16. Consideremos as semi-circunferências abaixo. Devemos mostrar que os triângulos OBC e O'B'C' são semelhantes, pois assim a razão



entre seus lados é sempre constante. Como P e P' são pé da perpendicular CP e CP' traçadas em relação a AB e A'B' respectivamente temos que $C\hat{P}O \equiv C'\hat{P}'O' = 90^o$. Pelo Corolário 7.9, os triângulos são semelhantes pois têm dois ângulos congruentes. Logo, os valores de seno e cosseno independem da semi-circunferência considerada.

9.17. Pelo Exercício 9.3, foi calculado o seno, o cosseno e a tangente dos seguintes ângulos (72°, 54°, 36°, e 9°). Utilizando agora a fórmula:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha,$$

podemos calcular facilmente

cos (171º) =cos (180º – 9º)=cos 180º cos 9º – sen 180º sen 9º = –cos 9º $= -\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$ .Também,sen (171º) = sen (180º – 9º)= sen 180º cos 9º+sen 9º cos 180º = – sen 9º = $= -\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$, e

tg (171º)= $\dfrac{\text{sen}\,171^o}{\cos 171^o} = \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$. De modo análogo, temos:

sen (162º)=sen (180º – 18º),
cos (162º)=cos (180º – 18º),
tg (162º)= $\dfrac{\text{sen}\,162^o}{\cos 162^o}$,
sen (150º)=sen (180º – 30º),
cos (150º)=cos (180º – 30º),
tg (150º)= $\dfrac{\text{sen}\,150^o}{\cos 150^o}$,
sen (144º)=sen (180º – 36º)
cos (144º)=cos (180º – 36º),
tg (144º)= $\dfrac{\text{sen}\,144^o}{\cos 144^o}$,
sen (135º)=sen (180º – 45º),
cos (135º)=cos (180º – 45º),
tg (135º)= $\dfrac{\text{sen}\,135^o}{\cos 135^o}$,
sen (126º)=sen (180º – 54º),
cos (126º)=cos (180º – 54º),
tg (126º)= $\dfrac{\text{sen}\,126^o}{\cos 126^o}$,

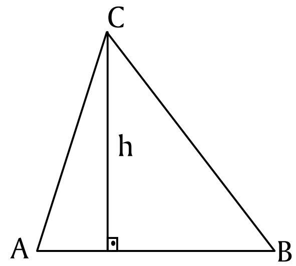
9.18. a) Pela relação fundamental temos $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Considerando $\cos\alpha \neq 0$, temos

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha .$$

b) Pela relação fundamental temos $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Considerando $\text{sen}\,\alpha \neq 0$, temos

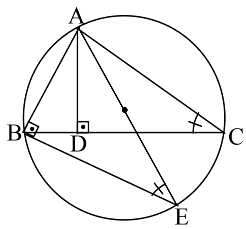
$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow 1 + \cot g^2\alpha + 1 = \cos\sec^2\alpha .$$

9.19. Consideremos um triângulo ABC de altura h em relação à AB, pelo Teorema 6.8, temos $A(ABC) = \frac{\overline{AB}.h}{2}$. Por definição, temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\overline{AC}}$, ou seja, $h = \overline{AC}\operatorname{sen}\alpha$, onde



$\alpha = m(\hat{A})$. Logo, $A(ABC) = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{1}{2}.\overline{AB}.\overline{AC}.\operatorname{sen}\alpha$.

9.20. Seja ABC um triângulo inscrito numa circunferência e E um ponto tal que AE é diametro. Considere AD a altura em relação à BC. Pelo Teorema 6.8, temos $A(ABC) = \frac{\overline{CB}.h}{2}$. Calculemos o valor de $\overline{AD}$. No triângulo ABE temos, pelo Corolário 8.16, $m(\hat{B}) = 90^o$

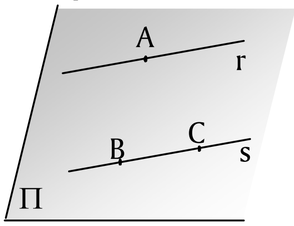


e, pelo Corolário 8.16, temos $\hat{E} \equiv \hat{C}$, pois subentendem o mesmo arco AB. Como $m(A\hat{D}B) = 90^o$ temos, pelo Corolário 7.9, que os triângulos ADC e ABE são semelhantes. Logo, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ implica $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{2r}$, ou seja, $\overline{AD} = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{2r}$. Logo, $A(ABC) = \frac{\overline{BC}.\overline{AB}.\overline{AC}}{2.2r} \Rightarrow A(ABC) = \frac{\overline{BC}.\overline{AB}.\overline{AC}}{4r}$.

Capítulo 10

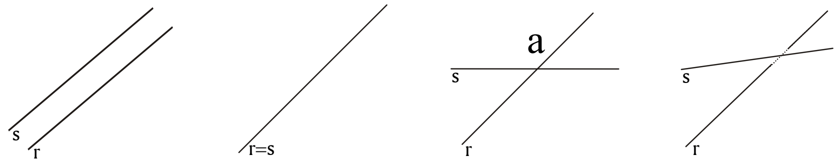
10.1. Existem infinitas retas num plano. De fato, consideremos um plano α e nele dois pontos distintos A e B, estes dois pontos determinam uma reta r contida em α pela Proposição 10.1. Consideremos em α e fora de r um ponto C. Foi visto em G.P. que numa reta r existem infinitos pontos. Logo, por estes pontos de r e por C podemos construir infinitas retas, de acordo com o Axioma I.2.a. Existem infinitos planos no espaço, pois dado três pontos quaisquer não colineares no espaço que existem pelo Axioma I.2.c, sempre existe um plano α que contém esses três pontos pelo Axioma I.2.b. Neste plano existem infinitas retas, como visto acima. Tomamos um ponto C fora de α. Pela Proposição 10.3, cada reta de α e C determinam um único plano. Assim construímos infinitos planos.

10.2. Sejam r e s duas retas reversas e suponhamos que elas se interceptam. Se a interseção for mais de um ponto, então as retas são coincidentes pelo Axioma I.2.a. Se a interseção for um único ponto, então pela Proposição 10.6, elas determinam um plano, o que contradiz a definição de retas reversas. Logo a interseção entre r e s é vazia. Quanto as retas paralelas, a existência está garantida pela própria definição de retas paralelas e, para garantir a unicidade, consideremos os pontos $A \in r$ e $B, C \in s$. Temos que A, B e C não são colineares, pelo Axioma I.2.b existe um único plano Π que os contém.

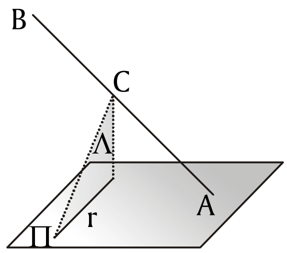


10.3. Sejam r e s duas retas quaisquer. Se $r \cap s = \varnothing$, pela Definição 10.7, temos que as retas podem ser paralelas ou reversas. Se $r \cap s$ contiver um único ponto temos, pela Proposição 10.5 que as retas são concorrentes e se $r \cap s$ contiver dois ou mais pontos, temos que as retas são coincidentes pela Proposição 10.1. Logo, existem quatro posições relativas entre retas, a saber: paralelas, reversas, concorrentes e coincidentes.

Paralelas Coincidentes Concorrentes Reversas

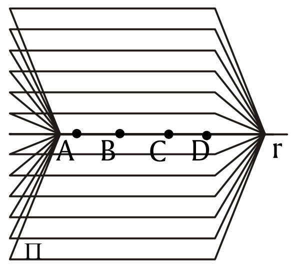


10.4. a) Falsa, pois para determinar um plano os pontos devem ser não colineares.
b) Falsa, pois se considerarmos uma reta r e os pontos A,B,C∈ r distintos, estes são colineares.
c) Verdadeira, pois, caso contrário, dois destes três pontos serão coincidentes, e assim, o terceiro será colinear.
d) Verdadeira, pois sejam r e s duas retas. Segue do item a) do Axioma I.4 que r e s são coincidentes ou $r \cap s = \emptyset$ (reversas ou paralelas) ou $r \cap s = \{P\}$ (concorrentes), assim são distintas.
e) Falsa, pois as retas reversas são distintas e não coplanares.
f) Verdadeira, por definição de retas concorrentes.
g) Verdadeira, por definição de retas concorrentes.
h) Falsa, pois retas coincidentes também têm ponto em comum.
i) Falsa, pois podem ser concorrentes.
j) Falsa, pois podem ser reversas.
l) Verdadeira, pelo Axioma I.4.c.
m) Falsa, pois as três retas podem ser coplanares.
n) Falsa, pois retas reversas não determinam plano.
o) Falsa, pois quando há três pontos distintos colineares e mais um quarto ponto não colinear, não determinam um quadrilátero reverso, pois os vértices serão coplanares.

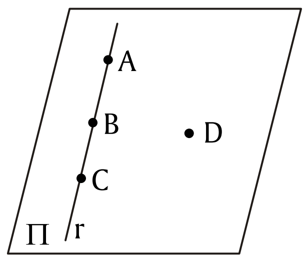


10.5. Por uma reta passam infinitos planos. De fato, seja r uma reta e um ponto A fora de r. Pela Proposição 10.4, a reta r e o ponto A determinam um plano Π. Seja B um ponto não pertencente a Π e considere o segmento AB. Temos que AB possui infinitos pontos e a reta AB é reversa a r, pois $r \in \Pi$ e B não pertence a Π. Logo, para cada ponto $C \in AB$, considere, pela Proposição 10.4, o plano $\Lambda_C = pl(r,C)$. Temos $\Lambda_C \neq \Lambda_{C'}$ quando $C \neq C'$ e $C' \in AB$, pois caso contrário AB e r seriam coplanares. Logo, para cada ponto C $\in$ AB, existe um plano Λ_C, ou seja, existem infinitos planos passando por uma reta. Por dois pontos passam infinitos planos, pois dados dois pontos distintos, pelo Axioma I.4.a eles passam uma reta e, pelo que foi feito anteriormente, temos assim o desejado. Para quatro pontos distintos temos três casos:

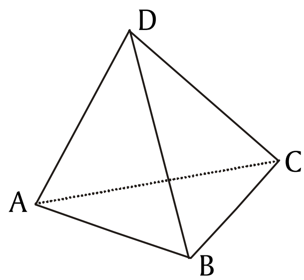
1. Se os quatro pontos forem colineares haverá infinitos planos contendo estes quatro pontos (situação estudada acima).



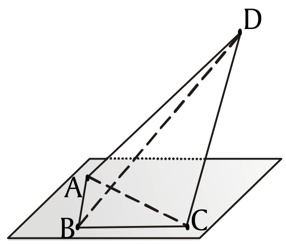
2. Se apenas três pontos forem colineares estes quatro pontos determinam uma reta e um ponto não pertencente a ela. Logo, estes quatro pontos determinarão um único plano.



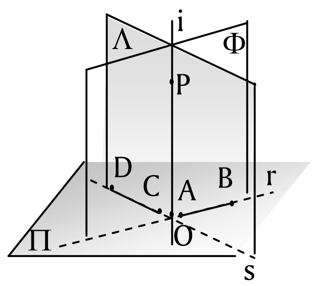
3. Em último caso, os pontos são três a três não colineares formando combinações de quatro pontos três a três não colineares, ou seja, quatro combinações possíveis. Como cada combinação de três pontos não colineares determina um plano teremos no total quatro planos determinados.



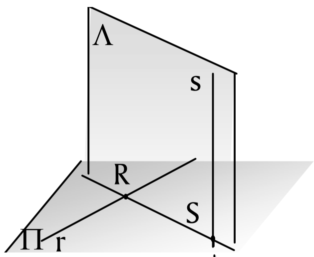
10.6. Consideremos o quadrilátero reverso ABCD no desenho ao lado. Suponhamos, por absurdo, que existe um plano que contém as diagonais AC e BD. Então este plano contém os pontos A, B, C e D, o que é uma contradição, pois ABCD é reverso. Portanto, as diagonais AC e BD são reversas.



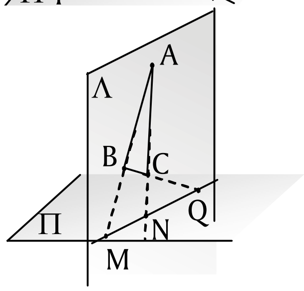
10.7. Consideremos os planos $\Lambda = pl(C,D,P)$ e $\Phi = pl(A,B,P)$. Estes planos são distintos e possuem o ponto P em comum. Assim, pelo Teorema 10.11, existe uma única reta $i = \Lambda \cap \Phi$. Sabemos que $P \in i$. Como r e s são concorrentes, seja $O = r \cap s$. Temos que $O \in r$ e $O \in s$, como r está em Λ e s está em Φ temos $O \in \Lambda \cap \Phi$. Assim, $O \in i$ e, portanto, a reta procurada é a reta r_{OP}.



10.8. Consideremos $\Pi = pl(r,S)$ e $\Lambda = pl(s,R)$. Assim $R, S \in \Pi$ e $R, S \in \Lambda$. Logo $\Pi \cap \Lambda = r_{RS}$ (reta determinada por R e S).

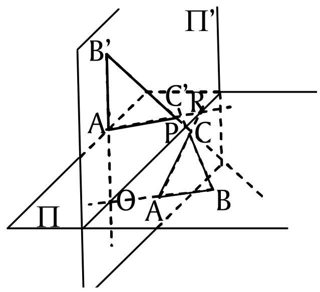


10.9. a) Consideremos o triângulo ABC. Como A, B e C são não colineares, eles determinam um plano $\Lambda = pl(A,B,C)$. Seja Π um plano que passa por M, N e Q distinto de Λ. Como M, N e Q estão em Λ, pois as retas que determinam o triângulo estão em Π, e M, N e Q estão em Λ, pois por hipótese,



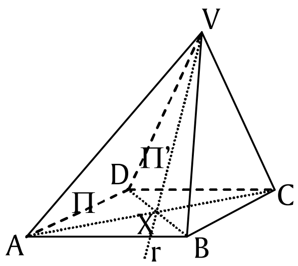
são pontos de interseções das retas que determinam o triângulo ABC e o plano Λ, temos que M, N e Q são pontos de $\Pi \cap \Lambda$. Assim, pelo Corolário 10.12.b, M, N e Q são colineares.

b) Sendo $\Pi = pl(A,B,C)$ e $\Pi' = pl(A',B',C')$ temos $AB \cap A'B' = \{O\}$. Como $O \in AB$ e $AB \subset \Pi$, implica $O \in \Pi$. Da mesma maneira, temos que $O \in A'B'$ e $A'B' \subset \Pi'$ implica que $O \in \Pi'$. Logo, $O \in \Pi \cap \Pi'$ distintos. Analogamente, $P \in \Pi$ e $P' \in \Pi'$, $R \in \Pi$ e $R' \in \Pi'$, ou seja os pontos O, P e R pertencem $\Pi \cap \Pi'$. Portanto, pelo

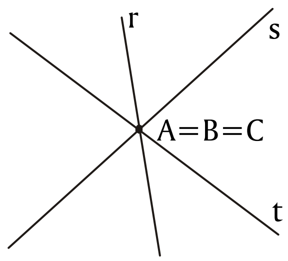


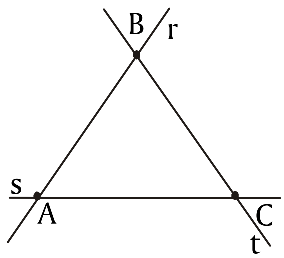
Corolário 10.12.b, O, P e R são colineares.

10.10. Seja X o ponto de interseção das diagonais do quadrilátero da base. Por hipótese, $V \in \Pi$ e $V \in \Pi'$, mas por construção como $X = AC \cap BD$, assim temos que $X \in \Pi$ e $X \in \Pi'$. Logo $\Pi \cap \Pi'$ é a reta r determinada pelos pontos V e X.

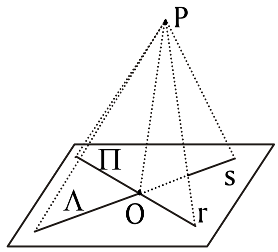


10.11. Consideremos o conjunto de retas {r, s, t}. Se quaisquer duas retas são concorrentes, então $r \cap s = A$, $r \cap t = B$ e $s \cap t = C$. Se $A=B=C$ então as retas se interceptam em um único ponto. Se os pontos são dois a dois distintos consideremos $\Pi = pl(r,s)$, $\Lambda = pl(r,t)$ e $\Theta = pl(s,t)$. Como A e B pertencem a r e $C \in s$ temos que Π contém A, B e C. Analogamente, os planos Λ e Θ contém A, B e C. Logo, pelo Axioma I.4.b, temos que $\Pi = \Lambda = \Theta$, e, portanto, as retas são coplanares.



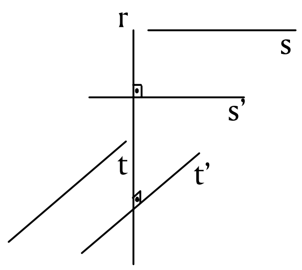


10.12. Sejam $\Pi = pl(r,P)$ e $\Lambda = pl(s,P)$. Os planos Π e Λ são distintos e P pertence a ambos. Além disso, $O \in \Pi$ e $O \in \Lambda$ pois $r \cap s = \{O\}$. Assim, pelo item a) do Corolário 10.12.a, temos que $\Pi \cap \Lambda$ é a reta r_{OP}.

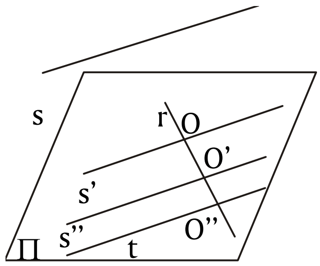


10.13. a) Por hipótese, consideremos três retas r, s e t tais que r // t e s //t. Queremos mostrar que as retas r e s também são paralelas. Como r e t são paralelas, elas estão num plano Π. Da mesma forma, s e t estão em um mesmo plano Λ. Seja A um ponto da reta r, pela Proposição 10.3, considere o plano $\Theta = pl(s,A)$. Como A é um ponto comum aos planos Π e Θ, temos pelo Teorema 10.11 que eles se interceptam segundo uma reta que chamaremos de r', isto é, $r' = \Pi \cap \Theta$. Mas como s é paralela a t, que é a interseção dos planos Π e Λ, temos que s é paralela a Π pois, caso contrário, s interceptaria Π em t o que é um absurdo. Logo $s \cap r' = \varnothing$, mas como s e r' estão em Θ temos s paralela a r'. Suponhamos agora que t e r' se interceptem em um ponto B. Como t está em Π e Λ e r' está em Θ temos que B pertence a interseção de Π, Λ e Θ. Como $s = \Pi \cap \Theta$ e $t = \Pi \cap \Lambda$, temos que $B \in s \cap t$, o que é absurdo, pois s e t são paralelas por hipótese. Logo, $t \cap r' = \varnothing$. Mas como t e r' pertencem a Π, e t e r são paralelas, por hipótese, temos duas retas paralelas a t passando pelo ponto A o que contradiz o Teorema 10.8. Logo $r = r'$. Além disso, como s é paralela a r' e $r' = r$ temos que s é paralela a r, como queríamos demonstrar.

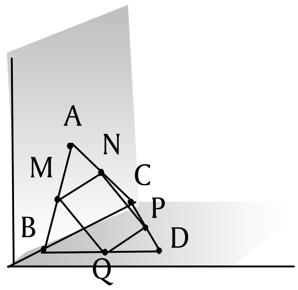
b) Não, pois consideremos s e t duas retas distintas e ortogonais a uma reta r, podemos ter um caso em que s e t são reversas, conforme desenho ao lado.



10.14. Sejam s' uma reta paralela a s e concorrente a r em O', e s'' uma reta distinta de s', também paralela a s, e concorrente a r em O''. Pelo Exercício 10.13.a temos que s'//s'' e estas, pela Definição 10.7 determinam um plano Π. Como s', s'' $\in \Pi$, temos que O', O'' $\in \Pi$, assim $r \in \Pi$. Agora, considere uma reta t, paralela a s e concorrente a r em T. Pelo Exercício 10.13.a, temos que t // s'e t // s'' que determinam os planos Λ e Θ respectivamente. Assim, $r \in \Lambda$ e $r \in \Theta$. Logo, r e s' $\in \Lambda$ e r e s' $\in \Pi$, assim $\Pi = \Lambda$ e, logo r, s'' $\in \Pi$ e r, s'' $\in \Theta$, portanto $\Theta = \Pi = \Lambda$. Segue que s', s'' e t são coplanares. Como t é arbitrária, temos o desejado.

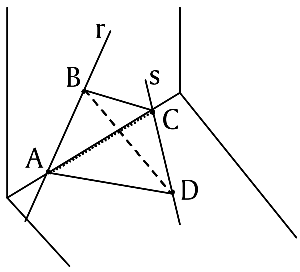


10.15. Consideremos o triângulo ABD, como M e Q são os pontos médios, temos pelo Teorema 10.11 que $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ e MQ//BQ. Se considermos o triângulo BCD, como N e P são pontos médios temos pelo Teorema 10.11 que $\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ e NP//BD. Logo, MQ ≡ NP e MQ//NP. Considerardo os triângulos ACD e ACB, obtemos de maneira análoga PQ=MN e PQ//MN. Logo, MNPQ é um paralelogramo.



10.16. Pelo Exercício 10.15 temos que a cada dois triângulos, ou seja, a cada duas faces do tetraedro, determinam um paralelogramo. Observemos que cada dois paralelogramos formados têm dois vértices opostos em comum, tendo, portanto, uma diagonal comum. Mas pela Proposição 5.14.d sabemos que as diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio, portanto encontram-se todas num mesmo ponto.

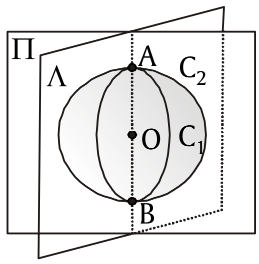
10.17. Se considerarmos o quadrilátero ABCD, como r e s são reversas temos que ABCD é um quadrilátero reverso, considerando AC e BD como diagonais do quadrilátero temos, pelo Exercício 10.6, que as retas AC e BD são reversas.



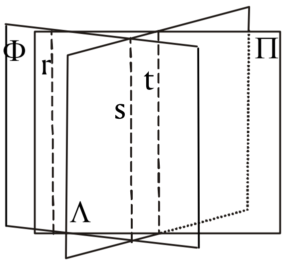
10.18. Sejam Π, Λ e γ três planos distintos e secantes dois a dois, com $\Lambda \cap \Theta = r$, $\Pi \cap \Theta = s$ e $\Pi \cap \Lambda = t$. Para analisarmos as posições relativas das três retas, comecemos primeiramente por r e s. Essas duas retas são distintas e coplanares, Então ou r e s são concorrentes, ou r e s são paralelas. Se r e s forem concorrentes, então, existe P tal que $r \cap s = \{P\}$ e usando as igualdades $\Lambda \cap \Theta = r$, $\Pi \cap \Theta = s$ e $\Pi \cap \Lambda = t$, obtemos:

$$\Pi \cap \Lambda \cap \Theta = (\Lambda \cap \Theta) \cap (\Pi \cap \Theta) = r \cap s = \{P\}.$$

Portanto, $r \cap s \cap t = \{P\}$. Se r e s forem paralelas, as retas r e t são coplanares, pois $r \subset \Lambda$ e $t \subset \Lambda$ por hipótese. Se existe Q tal que $r \cap t = \{Q\}$, temos pelo item anterior que $r \cap t = \{Q\} \Rightarrow r \cap s \cap t = \{Q\}$, o que contradiz a hipótese. Logo, r e t são paralelas. Considerando s e t, de maneira análoga, temos que s e t são paralelas.



10.19. Consideremos C_1 e C_2 duas circunferências de mesmo raio, e com mesmo centro em um ponto O de r, onde r é a reta de interseção de dois planos secantes Π e Λ. Sem perda de generalidade consideremos $C_1 \subset \Pi$ e $C_2 \subset \Lambda$. Como $C_1 \subset \Pi$ e tem centro $O \in r$, temos que C_1 intercepta r em dois pontos distintos A e B. Como $C_2 \subset \Lambda$ e tem centro $O \in r$ temos que C_2 intercepta r em dois pontos distintos C e D. Além disso, C_1 e C_2 tem mesmos raios, assim A = C e B = D ou A = D e B = C. Logo, $C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$.



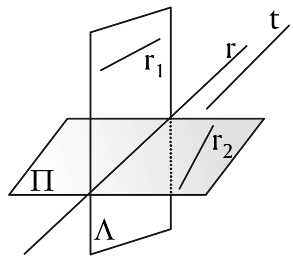
10.20. Sejam r e s duas retas paralelas, Π e Λ dois planos que passam por r e s respectivamente e se interceptam segundo uma reta t. Devemos mostrar que t // s e t // r. Como r e s são paralelas elas determinam um plano Θ. Assim $\Pi \cap \Theta = r$ e $\Lambda \cap \Theta = s$. Suponhamos por absurdo que $r \cap t = \{P\}$, pelo Exercicio 10.18, temos $r \cap s \cap t = \{P\}$, o que é uma contradição pois r // s, logo r // t. De maneira análoga, concluímos que t // s.

Capítulo 11

11.1. Como CD é paralela a AB, pois ABCD é um paralelogramo e como AB está no plano pl(VAB), temos pelo Teorema 11.2 que CD é paralela a pl(VAB).

11.2. Seja $r = pl(AE,CG) \cap pl(BF,DH)$. Temos que $AE//pl(BF,DH)$, pelo Teorema 11.2, pois AE // BF pela construção de paralelepípedo. Assim, pelo Teorema 11.3, que AE // r.

11.3. ($\Rightarrow$) Sejam Π e Λ dois planos secantes dados, consideremos $r = \Pi \cap \Lambda$ e seja t uma reta paralela a Π e a Λ. Sendo t // Λ, pelo Teorema 11.2, existe $r_1 \subset \Lambda$ tal que $t//r_1$. Sendo t // Π, pelo Teorema 11.2, existe $r_2 \subset \Pi$ tal que t // r_2. Logo, pelo Exercício 10.13.a, r_1 // r_2 e, pelo Teorema 11.2, r_1 // Π e $r_1 \subset \Lambda$. Pelo Teorema 11.3, r_1 // r e portanto, novamente pelo Exercício 10.4.a, r // t.



($\Leftarrow$) Suponhamos que t seja paralelo a r. Como $r \subset \Pi$, pelo Teorema 11.2, t // Π. Como $r \subset \Lambda$, pelo Teorema 11.2, t // Λ.

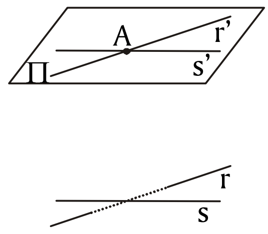
11.4. Como Π, Λ e Θ possuem um ponto em comum considere $t=\Pi\cap\Lambda$, $s = \Lambda \cap \Theta$ e $u= \Pi \cap \Theta$. Suponhamos que exista uma reta r simultaneamente paralela a Π, Λ e Θ. Então $r \cap \Pi = \varnothing$, $r \cap \Lambda = \varnothing$ e $r \cap \Theta = \varnothing$. Se $r \cap \Pi = \varnothing$ e $r \cap \Lambda = \varnothing$ então r // t. Analogamente, temos r // s e r // u. Logo, t // u. Por outro lado,

$$t \cap u= (\Pi \cap \Lambda) \cap (\Pi\cap \Theta)= \Pi \cap \Lambda \cap \Theta = A,$$

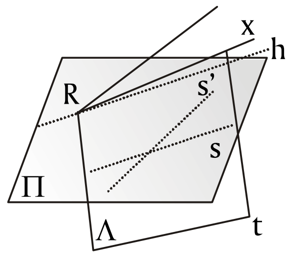
o que é absurdo. Portanto, não existe tal reta.

11.5. Seja R um ponto da reta r, como r e s são reversas então $R \notin s$, traçamos então por R, a única reta t paralela a s, que existe pelo Teorema 10.8. Como r e t são concorrentes em R, pela Proposição 10.6, r e t determinam um plano Π, como $t \subset \Pi$ e t // s então Π // s pelo Teorema 11.2. Assim Π contém r e é paralelo a s.

11.6. Usando o Teorema 11.8, construímos por A duas retas r'e s' paralelas a r e s respectivamente. Como r' e s' são concorrentes em A, pela Proposição 10.6 r' e s' determinam um plano Π. Como r' ⊂ Π e r'//r, pelo Teorema 11.2 temos que Π // r. Da mesma forma temos Π // s. Logo, Π é paralelo a duas retas r e s. Observemos que se r e s são concorrentes e A ∈ pl(r,s), então esta construção será impossível.



11.7. Se existir um plano que seja paralelo as três retas simultaneamente o problema não tem solução. Caso contrário construa por s um plano Π paralelo a t, como no Exercício 11.5, ou seja, tomando uma reta s' concorrente com s, e assim Π = pl(s,s'). Como supusemos que não existe plano paralelo simultâneamente as três retas, existe R tal que R = Π ∩ r. Seja x a reta que passa por R e é paralela a t. Como x // t e t // s' então x // s', pelo Exercício 10.13.a. Seja Λ= pl(s',x). Como R ∈ X, Λ = pl(s',R) e como R ∈ Π e s' ∈ Π por construção, Π = pl(s',R), ou seja, Π = Λ. Logo, x e s estão no mesmo plano e não são paralelos. Assim, x ∩ s = S, x ∩ r =R e x // t, como queríamos.



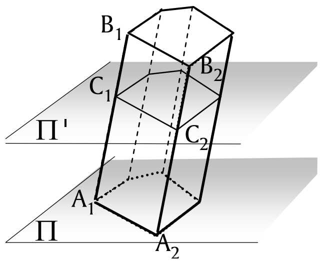
11.8. a) Falsa, sejam r e t retas reversas, considere uma reta s em um plano que contém r e é paralelo a t e, neste caso, s não intercepta t.
b) Verdadeira, Teorema 10.11.
c) Falsa, eles podem ser coincidentes.
d) Falsa, basta tomar uma reta paralela a interseção.
e) Falsa, podem ser paralelas.
f) Verdadeira, se fosse apenas um plano então as retas reversas estariam no mesmo plano. A reta comum é interseção dos dois planos.
g) Verdadeira, se a reta não contida no plano interceptasse o plano as duas retas não seriam paralelas.
h) Falsa, podem ser reversas.
i) Falsa, se forem concorrentes isso não ocorre.
j) Verdadeira, podem ser reversas.
k) Verdadeira, no plano existem infinitas retas paralelas entre si.

l) Falsa, a reta pode ser secante ao plano.
m) Verdadeira, Teorema 11.2.
n) Verdadeira. Se a reta estiver um dos planos, ela é paralela a interseção, pelo Teorema 11.3. Se ela não estiver no mesmo plano, ela é paralela aos dois planos pelo Teorema 11.2.

11.9. Consideremos Π e Λ dois planos paralelos e r uma reta qualquer contida em Π. Como $r \subset \Pi$ e $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$ então $r \cap \Lambda = \varnothing$. Logo, r é paralela ao plano Λ.

11.10. As arestas são paralelas por construção, pois como todas as arestas são paralelas a A_1B_1, pelo Exercício 10.13.a temos que todas são paralelas entre si. Elas são congruentes pois as faces do prisma são paralelogramos, por construção, assim: $A_1B_1 \equiv A_2B_2 \equiv A_nB_n$.

11.11. As bases são congruentes, pois cada uma das faces é um paralelogramo (por construção), logo temos $A_1A_2 \equiv B_1B_2$, $A_2A_3 \equiv B_2B_3$ e $A_nA_1 \equiv B_nB_1$. Assim as bases são congruentes. Quando interceptamos o prisma com um plano Π paralelo a base, pelo Teorema 11.8, todas as arestas laterais interceptam Π'. Suponhamos que $A_1B_1 \cap \Pi = C_1$ e $A_2B_2 \cap \Pi = C_2$.



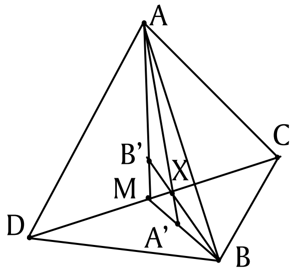
Como A_1B_1 // A_2B_2, temos que A_1, C_1, C_2 e A_2 estão em um plano e como Π é paralelo as bases temos C_1C_2 // A_1A_2 e assim $A_1C_1C_2A_2$ é um paralelogramo, logo $A_1A_2 = C_1C_2$. Com uma construção análoga para as outras arestas mostra-se que $A_1A_2\ldots A_n$ é congruente a $C_1C_2\ldots C_n$.

11.12. a) Falsa, podem ser secantes. Nesse caso tomamos a reta paralela a interseção dos planos.
b) Falsa, impossível se a reta for secante ao plano dado.
c) Falsa, sejam r e s retas reversas, trace uma reta s' paralela a s e concorrente a r, temos que r e s' determinam um único plano, se tomarmos um ponto P neste plano mas que não esteja contido em r, por ele não será possível traçar a reta desejada.
d) Verdadeira, basta tomar um ponto em cada reta e construir a única reta que os contém.
e) Falsa, o plano pode ser paralelo a outra reta.

f) Falsa, os planos podem ser secantes.
g) Verdadeira, pelo Teorema 11.5.
h) Falsa, elas podem ser reversas.
i) Verdadeira, pela primeira parte do Teorema 11.8 e pelo Exercício 11.9.
j) Falsa, a reta pode estar contida no plano

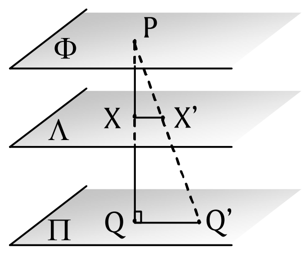
11.13. Imediato do Teorema 11.3 e do Teorema 11.9 e o Exercício 10.13.

11.14. Por definição, AB' e A'B se interceptam no ponto médio M do segmento CD. Portanto temos AA' $\subset$ pl(ABM), BB' $\subset$ pl(ABM) e AA' não paralelo a BB'. Isto implica que existe um ponto X = AA' $\cap$ BB'. Pelo Exercício 8.17 temos que $\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'M}} = 2 = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'M}}$ e

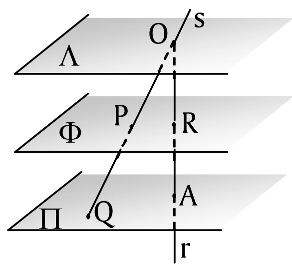


como $\hat{M}$ é um ângulo comum aos triângulos AMB e A'MB' temos, pelo Teorema 7.10, que AMB $\sim$ A'MB' e assim B'A' // AB. Logo, A'XB' $\sim$ AXB e assim $\frac{\overline{AX}}{\overline{A'X}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{B'X}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA'}} = 3$. Para finalizar, tomando o ponto médio N de BD concluímos que CC' e AA' estão no plano pl(ACN) e assim se interceptam num ponto Y com $\frac{\overline{AY}}{\overline{YA'}} = 2$. Logo, Y = X.

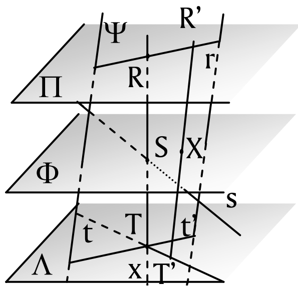
11.15. Seja Φ o único plano que passa por P e é paralelo a Π. Dado um ponto Q qualquer de Π, seja X o ponto do segmento PQ tal que $\frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}} = k$, onde k é a razão dada. Seja Λ o plano que passa por X e é paralelo a Φ e a Π. Dado um outro ponto qualquer Q' em Π,



considere a reta PQ', pelo Teorema 11.8, esta reta intercepta Λ num ponto X'. Pelo Teorema 11.11, temos que $\frac{\overline{X'P}}{\overline{X'Q}}$ = k. Com Q' é qualquer ponto de Π, todos os pontos de Λ tem essa propriedade. Para mostrar que Λ é o lugar geométrico desejado, resta mostrar que qualquer ponto que não esteja em Λ não satisfaz a propriedade. Seja, por absurdo, $V \in PQ´$ tal que $V \notin \Lambda$ e $\dfrac{\overline{VP}}{\overline{VQ'}} = k$. Seja Ψ um plano por V paralelo a Π, Temos que Ψ intercepta PQ num ponto Y, pelo Teorema 11.8. Pelo Teorema 11.11, $\dfrac{\overline{YP}}{\overline{YQ}} = \dfrac{\overline{YP}}{\overline{YQ'}} = k$, e assim no segmento PQ teríamos dois pontos Y e X dividindo o segmento PQ na mesma razão, o que é um absurdo pela definição de divisão de segmento. Logo, Λ é o único lugar com a propriedade.

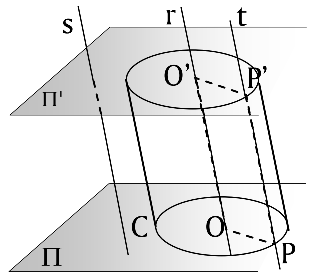


11.16. Seja A o ponto onde r intercepta Π, tracemos por P o único plano paralelo a Π (Teorema 11.6) que chamaremos de Φ. Seja R o ponto onde Φ intercepta r. Da G. P. podemos encontrar em r um ponto O tal que R seja o ponto médio do segmento AO. Traçamos por O o único plano paralelo a Π. Tracemos agora a unica reta determinada pelos pontos O e P (Axioma I.4.a). Assim, pelo Teorema 11.8, s intercepta Π em um ponto Q. Como R é o ponto médio de AO então $\dfrac{\overline{OR}}{\overline{AR}} = 1$. Como Φ // Π e Φ // Λ, pelo Teorema 11.11, temos $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{QP}} = 1$. Logo, P é o ponto médio do segmento OQ e assim OQ é o segmento procurado.



11.17. Consideremos r, s e t três retas reversas dadas, traçamos por r e por t dois planos Π e Λ, respectivamente, tais que Π e Λ sejam paralelos como no Exercício 11.5. Seja R’ um ponto da reta r, traçamos por R’ o segmento R’T’ onde T’ é um ponto qualquer da reta t. Encontramos em R’T’ um ponto X, tal que X seja o ponto médio de R’T’ e traçamos por X um plano Φ paralelo a

Π e Λ. Seja S o ponto onde s intercepta Φ. Caso s seja paralelo a Π, temos duas possibilidades, ou o problema não tem solução (caso s esteja em um plano que não eqüidista de Π e Λ) ou tem infinitas soluções (caso s esteja em um plano que eqüidista de Π e Λ). Seja Ψ o plano pl(r, S) que intercepta t em um ponto T, traçamos por S e T a única reta x que intercepta r em R, pois r ∈ Ψ, x ∈ Ψ e não são paralelas. Como Π, Λ e Φ são paralelos, $\frac{\overline{R'X}}{\overline{T'X}} = 1$ temos pelo Teorema 11.11 que $\frac{\overline{RS}}{\overline{TS}} = 1$, e assim S é ponto médio de RT.

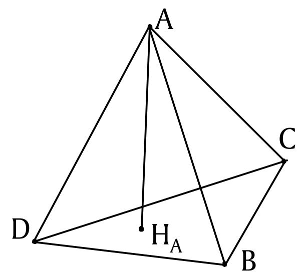


11.18. Seja O o centro de C e tracemos por O uma reta r paralela a s. Pelo Teorema 11.8, r ∩ Π' = O'. Seja P um ponto qualquer de C e tracemos por P uma reta t paralela a s que encontra Π' num ponto P'. Consideremos o plano Λ = pl(r,t). Como Π e Π' são paralelos, pelo Teorema 11.9, OP ∈ Π e O'P' ∈ Π' são paralelos. L ogo, OPP'O' é um paralelogramo. Assim O'P' ≡ OP cuja medida é o raio de C. Como P é qualquer ponto de C, fazendo C percorrer a circunferência C, obteremos uma circunferência C' com o mesmo raio que C e assim congruentes.

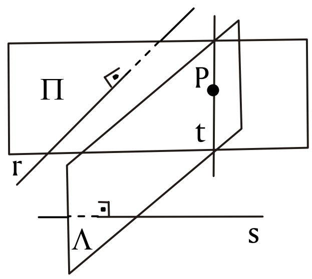
11.19. Temos que ou pl(A,r) // pl(B,s) ou pl(A,r) ∩ pl(B,s) = t. Vamos estudar os dois casos. Considere um ponto qualquer A' em r e verifique se existe B' ∈ s tal que A'A // B'B. Caso exista B', pelo Teorema 11.2, pl(A,r) // pl(B,s). Caso não exista B', pl(A,r) ∩ pl(B,s) = t e, neste caso, teremos que r // pl(B,s) pelo Teorema 11.2, e como r ∈ pl(A,r), pelo Teorema 11.3, r // t. Como s // pl(A,r) e s ∈ pl(B,s), concluímos de maneira análoga que s // t. Assim, t // r e t // s.

11.20. Temos duas situações possíveis: r ∩ Π = r ou r ∩ Π é um ponto Q. O primeiro caso não é possível, pois a reta concorrente não poderia ser paralela a Π. No segundo caso, seja s a única reta passando por P paralela a r. Considere o plano Λ = pl(r,s). Como r ∩ Π = Q, temos Λ ∩ Π = t (pelo Teorema 10.11). Seja u a única reta em Λ paralela a t passando por P. Temos que u é concorrente com r pois r // s e u é concorrente com s em P e, além disso u é paralela a Π pois u é paralela a t e t $\in \Pi$ (Teorema 11.2). Logo, u é a reta procurada.

Capítulo 12



12.1. Seja ABCD um tetraedro regular e considere r a reta que passa por A e é perpendicular ao plano Π = pl(BCD). Seja $H_A = r \cap \Pi$. Como ABCD é um tetraedro regular, temos que $AB \equiv AC \equiv AD$. Assim os triângulos retângulos ABH_A, ACH_A e ADH_A são congruentes pelo Teorema 4.17 (Caso LLA□), pois AH_A é comum a todos. Segue que BH_A, CH_A e DH_A são congruentes. Logo, H_A é circuncentro do triângulo BCD. Como o tetraedro é regular, BCD é eqüilátero, assim H_A é também ortocentro, incentro e baricentro. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para os pés de perpendiculares H_B, H_C e H_D , que serão portanto baricentros dos triângulos ACD, ABD e ABC respectivamente. Recaímos então no Exercício 11.14 concluindo o item a) e, pela segunda parte do Exercício 11.14, concluímos o item b).

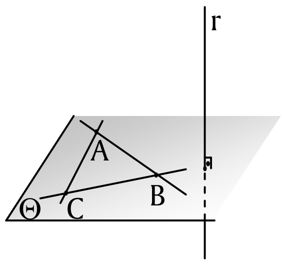


12.2. Existência (1º. Modo): Consideremos r e s duas retas não paralelas e P um ponto dado. Seja Π o único plano que passa por P e é perpen-dicular a r (possível pelo item a) do Teorema 12.6.a) e seja Λ o único plano que passa por P e é perpendicular a s. Assim Π e Λ tem o ponto P em comum, logo do Teorema 10.11 temos que $\Pi \cap \Lambda = t$, onde t é a reta que passa por P e que afirmamos ser ortogonal a r e a s. De fato, como r é perpendicular a Π, pela Definição 12.1, r é ortogonal a qualquer reta de Π, em particular a t. De maneira análoga temos que t é ortogonal a s.

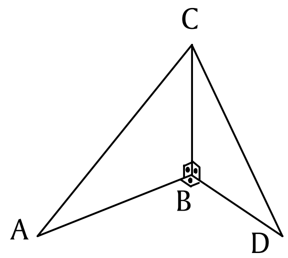
Existência (2º. Modo): Consideremos r e s duas retas não paralelas e P um ponto dado. Tracemos por um ponto qualquer $A \in r$ uma reta s' paralela a s. Tracemos por P a única reta t perpendicular ao plano pl(r,s') (item b) do Teorema 12.6). Por definição, t é ortogonal a s.

Unicidade: Se existissem duas retas, então teríamos Π e Π' perpendiculares a r passando por P, Λ e Λ' perpendiculares a s passando por P, o que contradiz o item a) do Teorema 12.6.

12.3. Observemos que AC e AB são concorrentes em A, assim pela Proposição 10.6, AC e AB determinam um plano Θ. Como r é ortogonal a AB e AC, temos, pelo Teorema 12.5, que r é perpendicular a Θ. Como BC está em Θ, temos, pela Definição 12.1, que r é ortogonal a BC.

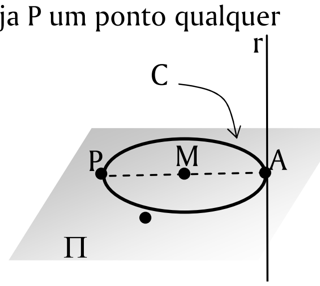


12.4. Como AB é perpendicular a BC e AB é ortogonal a CD então AB é perpendicular ao plano determinado pelos pontos B, C e D, (Teorema 12.5) pois DC e BC são concorrentes. Assim temos que AB é perpendicular a BD pela Definição 12.1. Mas se BD é perpendicular a AB e a BC então BD é perpendicular



ao plano determinado pelos pontos A, B e C, pelo Teorema 12.5. Logo, pela Definição 12.1 temos que BD é ortogonal a AC.

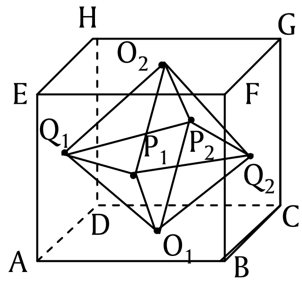
12.5. Seja r uma reta qualquer do espaço e seja P um ponto qualquer que não pertence a r. Pelo item a) do Teorema 12.6 existe um único plano Π que passa por P e é perpendicular a r. Seja $A = \Pi \cap r$, afirmamos que o lugar geométrico dos traços das perpendiculares por P aos planos que contém r são os pontos da circunferência C em Π, com centro no ponto

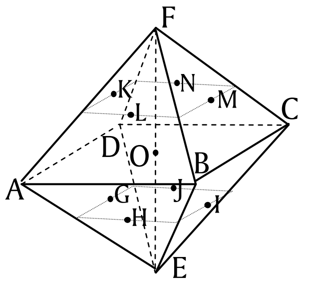


médio M do segmento AP e raio MA. De fato, devemos mostrar que:
(i) Todos os pontos de C são traços de retas perpendiculares a planos que passam por r.
(ii) Os únicos pontos que são traços das perpendiculares por P a planos por r são pontos de C.
Para mostrar o item (i), seja P' um ponto qualquer de C distinto de P e de A. Temos PP'A um triângulo inscrito numa semicircunferência de

diâmetro AP, logo pela Proposição 8.15, AP'P é retângulo em P'. Seja Λ = pl(r,P') que é portanto um dos planos do feixe de planos por r. Como r é perpendicular a Π, por construção, e PP' $\in \Pi$, temos que PP' é ortogonal a r, além disso vimos acima que PP' é perpendicular a AP' que está em Λ. Assim, pelo Teorema 12.5, PP' é perpendicular a Λ e como P' $\in \Lambda$, por construção, P' é o traço de uma reta por P perpendicular a Λ. Como P' foi tomado arbitrária em C, distintos de P e A, resta mostrar apenas que P e A também são traços de retas por P perpendiculares a planos que passam por r. Temos que A é o traço da reta PA com o único plano por A perpendicular a PA (que contém r), e P é o traço da reta perpendicular em P ao plano pl(P,r). Para mostrar o item (ii), seja Q um traço que satisfaz a propriedade. Consideremos o plano Θ = pl(r,Q). Se Q é um dos traços desejados, devemos ter PQ perpendicular a Q. Mas r é ortogonal a PA, por construção, assim r é ortogonal a PQ e a PA, logo, pelo Exercício 12.3, r é ortogonal a AQ. Assim, Q está no plano Π. Como A $\in \Theta$, AQ está em Θ, e como PQ é perpendicular a Θ, por hipótese, o triângulo PQA é retângulo em Q, portanto, Q está em C

12.6. Para a primeira parte, seja ABCDEFGH um cubo. Sejam O_1, O_2, P_1, P_2, Q_1 e Q_2 os centros das faces. Temos que $\overline{O_1O_2} = \overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$ pois estas medidas são exatamente a medida do lado do cubo. Além disso, P_1, P_2, Q_1 e Q_2 estão a mesma distância da face ABCD, logo pertencem a um plano paralelo a esta face, assim O_1O_2 é perpendicular ao plano pl(Q_1Q_2, P_1P_2). Portanto, pelos Exmplos 12.6 e 12.8, o sólido obtido $O_1O_2P_1P_2\ Q_1Q_a$ é um octaedro.

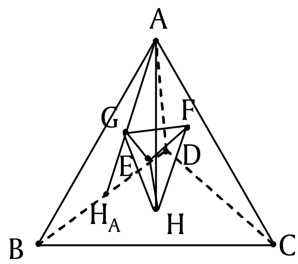




Para a segunda parte, seja O, o centro do octaedro. Por definição $\overline{AO} = \overline{FO} = \overline{DO}$ assim os triângulos retângulos AOF e DOF são congruentes pelo caso LAL, logo $\overline{AF} = \overline{DF}$. De modo análogo, mostra-se que todos os lados do octaedro regular são congruentes, ou seja, todas as faces são triângulos equiláteros. Assim, os seus centros são circuncentros, ortocentros, incentros e baricentros. Sejam G, H, I, J, K, L, M e N estes centros. Por congruência de triângulos as distâncias de G, H, I, J ao plano Π=pl(AC, BD) são iguais e, portanto, formam um plano paralelo a Π, idem para K, L, M e N. Logo, o ponto P = KG $\cap$ Π é ponto médio de KG. Como AKG é isósceles e AP é mediana temos que AP é altura. Idem para LH, MI e JN, que são portanto paralelos, congruentes e formam um ângulo reto com Π. Logo, pela Definição 12.7, GHIJKLMN é um cubo.

12.7. Sejam ABCD o tetraedro e E, F, G e H os centros das faces, conforme desenho. Sabemos, pelo Exercício 11.14, que $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{3}$. De modo análogo temos que

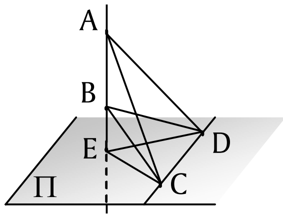
$$\frac{\overline{FH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{1}{3}.$$



Assim, EH ≡ EF ≡ EG ≡ FH ≡ FG ≡ GH. Logo, por definição, EFGH é um tetraedro regular.

12.8. *(Existência)* Sejam r e s retas reversas e ortogonais. Considere uma reta s' // r concorrente com s. Seja Π = pl(s,s'). Como r // s', pelo Teorema 11.2, r // Π. Assim, pelo Teorema 12.11, existe um único plano Λ que contém r e é perpendicular a Π. Como r $\in$ Λ e r // Π temos, pelo Teorema 11.3, que r // t onde t = $\Lambda \cap \Pi$. A reta s é perpendicular a t, pois t // r e s é ortogonal a r, por hipótese. Assim, temos Λ perpendicular a Π e s perpendicular a t, pelo Teorema 12.9, s é perpendicular a Λ. Logo, Λ é o plano desejado.

(Unicidade) Seja Λ' um outro plano por r perpendicular a s. Construímos agora um plano Φ por s, perpendicular a r (construção análoga ao feito acima). Seja A = $\Phi \cap$ r, B = $\Lambda \cap$ S e C = $\Lambda' \cap$ s. Como s é perpendicular a Λ temos AB é perpendicular a s e como s é perpendicular a Λ' temos AC é perpendicular a s, o que é um absurdo, pois no plano Φ teremos um triângulo ABC com dois ângulos retos.



12.9. Seja Π o plano tal que DC ⊂ Π e AB é perpendicular a Π (existe e é único pelo Exercício 12.8). Seja E o traço de AB sobre Π. Temos que BCE e BDE são triângulos retângulos com hipotenusas BC e BD, respectivamente. Pelo Teorema 6.9 temos,

$$\overline{BC}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{EB}^2 \tag{1}$$

e

$$\overline{BD}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{EB}^2 \tag{2}$$

Subtraindo (2) de (1) temos que:

$$\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{ED}^2 . \tag{3}$$

ACE e ADE também são triângulos retângulos com hipotenusas AC e AD, respectivamente. Pelo Teorema dePitágoras temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AE}^2 \tag{4}$$

e

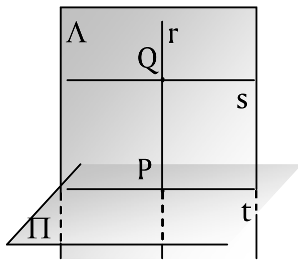
$$\overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2 . \tag{5}$$

Subtraindo (5) de (4) temos que

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{DE}^2 . \tag{6}$$

Logo, de (3) e (6), temos

$$\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 .$$



12.10. Consideremos a reta s e o plano Π, tais que s e Π sejam perpendiculares a uma reta r em pontos distintos. Queremos mostrar que s e Π são paralelos. Seja P o traço de r sobre Π, traçamos por P a única reta t paralela a s, como s e t são paralelas elas estão em um mesmo plano Λ. Como Π e Λ tem o ponto P em comum então pelo Teorema 10.11, a interseção de Π e Λ será a reta que passa por P e é paralela a s, logo t = Π ∩ Λ. Assim t ⊂ Π e, portanto pelo Teorema 11.2 temos que Π e s são paralelos.

12.11. Sejam r, P e Π uma reta, um ponto e um plano, respectivamente. Queremos encontrar uma reta s que passa por P, seja paralela a

Π e ortogonal ou perpendicular (caso $P \in r$) a r. Tracemos por P o único plano Λ perpendicular a r e também por P o único plano Θ paralelo a Π passando por P. Suponhamos que $\Theta \cap \Pi = s$, neste caso, s será a reta procurada, pois s é paralela a Π e como r é perpendicular a Λ então r é ortogonal a toda reta de Λ em particular a s. Se $\Theta = \Pi$ ou $\Theta \mathbin{/\!/} \Pi$ então qualquer reta por P será solução, pois neste caso r é perpendicular a Π.

12.12. Sejam P, r e Π um ponto, uma reta e um plano, respectivamente, dados. Se $P \in r$ o problema não tem solução, pois P seria interseção do plano com a reta. Se r é perpendicular a Π e $P \notin r$ o programa terá infinitas soluções, pelo Corolário 12.10. Se r não é perpendicular a Π e $P \notin r$, por P traçamos uma reta s paralela a r e uma reta t perpendicular a Π. Assim s e t se interceptam em P e, portanto, determinam um plano Λ paralelo a r, pelo Teorema 11.2, e perpedicular a Π pelo Teorema 12.8.

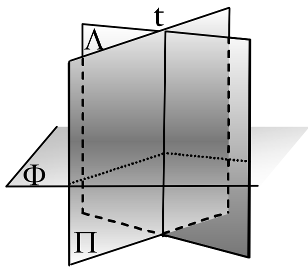
12.13. Temos BF perpendicular a ABCD por definição de cubo. Logo, BF é ortogonal a AC. Temos também que BD perpendicular a AC, pois ABCD é um losango. Logo AC é ortogonal ao par (BF, BD) de retas concorrentes em B no plano (BD, FH). Pelo Teorema 12.5 temos que AC é perpendicular ao pl(BD, FH).

12.14. Pelo Exercício 12.13, sabemos que AC é perpendicular a pl(BD,FH), assim pelo Teorema 12.8 temos que pl(BD,FH) é perpendicular ao plano da face ABCD. Como $BH \subset$ pl(BD,FH), temos pelo Teorema 12.11 que o único plano que contém a diagonal BH e é perpendicular ao plano da face ABCD é o plano pl(BD,FH).

12.15. Sejam Π e Λ dois planos perpendiculares. Sejam r uma reta perpendicular a Π e s uma reta perpendicular a Λ. Queremos mostrar que r e s são ortogonais. Como Π e Λ são perpendiculares, existe $t \in \Pi$ tal que t é perpendicular a Λ (Teorema 12.11). Assim, t e s são perpendiculares a Λ, logo, pelo Teorema 12.4, t é paralela a r. Como t está em Π e r é perpendicular a Π, temos pela Definição 12.1 que t é ortogonal a r. Assim, segue do Proposição 12.3 que r e s são ortogonais. Reciprocamente, sejam r e s retas perpendiculares a dois planos Π e Λ respectivamente. Seja A um ponto qualquer de r. Considere a reta s' paralela a s passando por A. Pela Proposição 12.3, s' é perpendicular a Λ. Como r e s' são concorrentes, consideremos o plano Θ = pl(r, s'). Como Θ contém r, ele é perpendicular a Π e como γ contém s', ele é perpendicular a Λ. Portanto, Θ é perpendicular a r' = $\Pi \cap \Lambda$ e como por hipótese r e s são ortogonais, temos que r e s' são perpendiculares, assim por definição, Π e Λ são perpendiculares.

12.16. Seja r uma reta contida em um plano Π e perpendicular a um plano Λ. Logo, pelo Teorema 12.11, temos que Π e Λ são perpendiculares. Seja s uma reta de Λ, tal que s seja perpendicular a t onde t = $\Pi \cap \Lambda$. Logo, pelo Teorema 12.8, temos que s é perpendicular a Π. Portanto, s está contida em Λ e é perpendicular a Π.

12.17. Sejam Π e Λ dois planos secantes, tais que $\Pi \cap \Lambda$ = t. Seja Θ um plano perpendicular a Π e a Λ. Suponhamos que Θ não seja perpendicular a t. Assim temos que Π e Λ passam por t e são perpendiculares a Θ o que contradiz o Teorema 12.11. Logo, Θ é perpendicular a t.



Reciprocamente, como Θ é perpendicular a t, t $\subset \Pi$ e t $\subset \Lambda$, temos pelo Teorema 12.8 que Θ é perpendicular a Π e Λ, mostrando assim o desejado.

12.18. Como ABCD é um losango, temos que AC é perpendicular a BC. Como AC é perpendicular a BD e ao pl(BD, FH) pelo Exercício 12.13, temos, pelo Teorema 12.8, que pl(BD, FH) e pl(AC, EG) são perpendiculares.

12.19. a) Falsa, considere três planos que contém três faces de um cubo e que tenham um vertice comum
b) Verdadeira, pelo Teorema 12.8.
c) Falsa, a reta pode estar contida no plano.
d) Verdadeira, pelo Teorema 12.8.
e) Falsa, o plano e a reta podem ser secantes.
f) Falsa, basta considerarmos a reta de interseção entre os dois planos e uma reta paralela a estas em um deles.

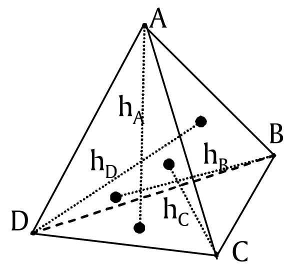
g) Verdadeira, se a reta não for perpendicular ao plano, o Teorema 12.11 nos garante que, o plano será único, se a reta for perpendicular, existem infinitos planos.
h) Verdadeira, todo plano que corta um corta também o outro e pelo Teorema 11.11 o paralelismo entre os planos manterá o ângulo entre os planos.

12.20. Sejam P um ponto e Π e Λ dois planos dados, tal que $P \notin \Pi$ e $P \notin \Lambda$. Se Π e Λ forem paralelos, basta construímos por P uma reta r paralela a Π e por r um plano Θ perpendicular a Π (possível pelo Corolário 12.10). Assim, Θ será perpendicular a Π e a Λ pelo Exercício 12.19.h. Se Π e Λ não forem paralelos então do Exercício 12.17, basta construirmos por P um plano Θ perpendicular a reta interseção de Π e Λ, possível pelo Teorema 11.2.

Capítulo 13

13.1. Seja ABCD um quadrilátero reverso. Como, por hipótese, AB ≡ BC ≡ CD ≡ AD ≡ AC ≡ BD, temos um tetraedro regular. Assim, o resultado segue imediatamente da Proposição 13.4.

13.2. Sejam h_A, h_B, h_C e h_D as alturas do tetraedro em relação aos vértices A, B, C e D, respectivamente. Suponhamos, sem perda de generalidade que h_A e h_B sejam concorrentes. Queremos mostrar que h_B e h_D são concorrentes. Temos:



(1) h_A é perpendicular ao plano pl(BCD) e assim h_A é ortogonal a CD.
(2) h_B é perpendicular ao plano pl(ACD) e assim h_B é ortogonal a CD.

Como, por hipótese, h_A e h_B são concorrentes, temos de (1), (2) e Teorema 12.5 que CD é perpendicular ao plano pl(h_A, h_B). Mas pl((h_A, h_B) contém AB, logo:

(3) CD é ortogonal a AB.

Temos também que

(4) h_C é perpendicular ao plano pl(ABD) e assim h_C é ortogonal a AB.

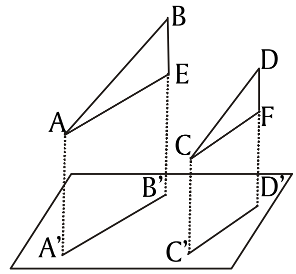
(5) h_D é perpendicular ao plano pl(ABC) e assim h_D é ortogonal a AB.

De (3), (4) e Teorema 12.5, temos que AB é perpendicular ao plano pl(CD, h_C). De (3), (5) e Teorema 12.5, temos que AB é perpendicular ao plano pl(CD, h_D). Pelo item a) do Teorema 12.6 temos pl(CD, h_C) = pl(CD, h_D) e então h_C e h_D são coplanares. Como h_C e h_D não são paralelos, concluímos que são concorrentes.

13.3. a) Verdadeira, pela Definição 13.1.
b) Falsa, será um ponto se a reta for perpendicular ao plano.
c) Verdadeira, pelo item a) da Proposição 13.2.
d) Verdadeira, pois o segmento sempre é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem a projeção como cateto.
e) Falsa, é a reta de interseção dos planos.

f) Falsa, suas projeções podem ser coincidentes, bastando estar contídas no plano prependicular.
g) Verdadeira, pois se não for, teremos um triângulo retângulo com cateto igual a hipotenusa, o que é um absurdo.
h) Falsa, é sempre a menor distância entre os pontos de uma e a outra.
i) Verdadeira, pela Proposição 13.8.
j) Falsa, pela Definição 13.13.

13.4. Em primeiro lugar, observamos que as projeções ortogonais A'B' e C'D' são paralelas. Sejam E e F pontos de BB' e DD', respectivamente, tais que AE // A'B' e CF // C'D'. Temos também que os triângulos AEB e CFD são retângulos em E e F, respectivamente, e os ângulos $E\hat{A}B$ e $F\hat{C}D$ congruentes.

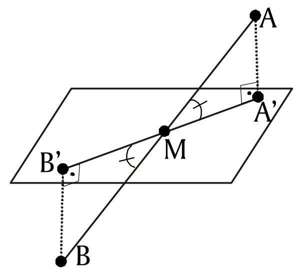


Portanto, pelo Corolário 7.9 temos que os triângulos ABE e CDF são semelhantes. Assim, $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$. Como AE ≡ A'B' e CF ≡ C'D', o resultado segue.

13.5. Sejam AB um segmento e Π um plano que passa pelo ponto médio do segmento AB. Temos três casos a considerar:

1. Se Π passa por M, ponto médio de AB e contém o segmento AB. Assim temos que a d(Π, A)= d(Π, B)=0.

2. Se Π passa por M, não contém AB e não é perpendicular a AB. Construímos por A um segmento AA', tal que A' é o traço de AA' sobre Π' (possível pelo Teorema 12.6). De maneira análoga, construímos BB' e traçamos A'B' que passa por M, pois A, A', B e B' são coplanares. Logo, os triângulos AA'M e BB'M são coplanares. Como m(Â) = = m($\hat{B}$) = 90º, $\overline{AM} = \overline{MB}$, por hipótese, e $A'\hat{M}A \equiv B'\hat{M}B$, pois são ângulos opostos pelo vértice temos pelo caso LAA_o que AA'M≡BB'M , logo $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ e assim d(A, Π)=d(B, Π).



3. Se Π passa por M e é perpendicular a AB. Neste caso, temos A'=B'=M e então $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ e assim d(A, Π)=d(B, Π).

13.6. a) Sejam A, B e r dados. Temos três casos a considerar:

1. Se r e AB são concorrentes. O plano será o próprio plano determinado por r e AB, pois o plano contém r e tem distância zero em relação a A e a B.

2. Se r e AB são paralelos. Existem infinitos planos, pois qualquer plano que passa por r é paralelo ou contém AB. Se forem paralelos a Proposição 13.8 nos garante que A e B são eqüidistantes do plano. Se AB estiver contido no plano temos que d(A, plano)= d(B, plano)=0.

3. Se r e AB são reversas: O problema admite duas soluções:
- O plano Π determinado por r e pelo ponto médio M de AB, pois temos o resultado pelo Exercício **13.5**.
- O plano Λ que passa por r e é paralelo a reta AB, pois temos o resultado pela Proposição 13.8.

b) Sejam A, B e r dados, temos três casos a considerar:
1. Se r e AB são concorrentes, então pela Proposição 10.6, r e AB determinam um plano Π. Basta então que tomemos qualquer plano Π' paralelo a Π, pois como $r \subset \Pi$ e $\Pi' \,//\, \Pi$ então, pelo Corolário 11.7, existe $r' \subset \Pi'$ tal que $\Pi' \,//\, \Pi$ e assim, pelo Teorema 11.2 temos que r e Π' são paralelos e, pela Proposição 14.6, A e B são eqüidistantes de Π'.

2. Se AB e r são paralelas, tracemos por AB um plano Λ qualquer que seja paralelo a r, pois como A, $B \subset \Lambda$ então d(A, Λ) = d(B, Λ) = 0.

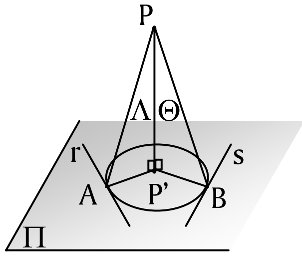
3. Se r e AB são reversas, tracemos por AB um plano Θ paralelo a r (possível pelo Exercício 11.5), assim d(A, Θ) = d(B, Θ) = 0 e r é paralelo a Θ por construção.

c) Basta considerar o plano que passa pelo ponto médio do segmento formado pelos pontos dados que seja perpendicular a reta dada. (veja Exercício **13.5**).

13.7. Pela Definição 13.17, sabemos que o ângulo entre uma aresta a e uma face que não a contém é o menor ângulo entre a e o plano da face. Considerando o triângulo ABH, seja a = $\overline{AB}$, pela Proposição 13.16 devemos então encontrar o ângulo $A\hat{B}H$. Sabemos, pelo Exemplo 13.1, que AA' $= \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Como AA' é perpendicular ao plano da face BCD temos $\operatorname{sen} A\hat{B}H = \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Logo, $A\hat{B}H$ é o ângulo cujo seno é $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

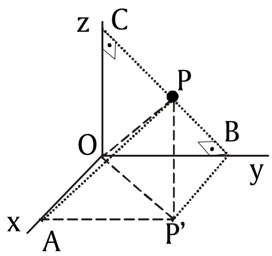
13.8. Sejam Π_1 e Π_2 planos secantes tal que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = r$. Vamos por um abuso de linguagem considerar nesta resposta, que os planos Π_1 e Π_2 formam dois ângulos suplementares (apenas para facilitar a descrição da solução). Afirmamos que o lugar geométrico são os planos Λ_1 e Λ_2 que dividem os ângulos entre os planos Π_1 e Π_2 ao meio. Seja A um ponto qualquer de Λ_1 ou Λ_2. Seja A_1 a projeção de A sobre Π_1 e A_2 a projeção de A sobre Π_2. Considere o plano $pl(A,A_1,A_2) = \Phi$. Como $AA_1 \subset \Phi$ e AA_1 é perpendicular a Π_1, então Φ é perpendicular a Π_1 (Teorema 12.8), analogamente Φ é perpendicular Π_2. Assim, pelo Exercício 12.6, Φ é perpendicular a r. Como $r \subset \Lambda_1$ e $r \subset \Lambda_2$, pelo Teorema 12.8, Φ é perpendicular a Λ_1 e Λ_2. Seja $A_0 = r \cap \Phi$, então AA_1 é perpendicular a A_0A_1 e AA_2 é perpendicular a A_0A_2. Temos ainda que A_0A_1 e A_0A_2 são as projeções de A_0A em Π_1 e Π_2, respectivamente. Como $\Phi \cap \Lambda_1 = A_0A$ (ou $\Phi \cap \Lambda_2 = A_0A$, temos por definição que o ângulo entre Π_1 e Λ_1 (ou entre Π_1 e Λ_2) é o ângulo entre A_0A_1 e A_0A. Analogamente para Π_2 e Λ_1 (ou Λ_2). Assim, como por hipótese, Λ_1 e Λ_2 dividem os ângulos entre Π_1 e Π_2 ao meio, $A_2\hat{A}_0A \equiv A_1\hat{A}_0A$. Logo, pelo caso ALA temos $A_0AA_1 \equiv A_0AA_2$. Segue que $AA_1 \equiv AA_2$. Os planos Λ_1 e Λ_2 são chamados planos bissetores dos planos Π_1 e Π_2.

13.9. Seja C a circunferência do plano Π com centro P', r e s retas tangentes a C nos pontos A e B, respectivamente. Consideremos o plano Λ formado pelas retas AP'e PP'. Logo, pelo Teorema 12.8, Λ é perpendicular a Π. Analogamente, se Θ é o plano formado pelas retas PP' e P'B então Θ é perpendicular a Π. Logo, pelo Corolário 13.10,



PA e PB são perpendiculares a r e s respectivamente, portanto a distância de P a r é $\overline{PA}$ e a distância de P a s é $\overline{PB}$. Como os triângulos PP'A e PP'B tem o lado PP' comum, os ângulos $P\hat{P'}A$ e $P\hat{P'}B$ são retos e os lados P'A e P'B são raios da circunferência C. Pelo caso LAL, os triângulos PP'A e PP'B são congruentes, logo $\overline{PA} = \overline{PB}$.

13.10. a) Seja $P \in r$ e P' o traço de P no plano pl(x,y). Como o plano pl(P,P',A) tem PA perpendicular a $x \in$ PP' ortogonal a x, então pelo Teorema 12.5 ele é perpendicular a x e assim o triângulo OAP é retângulo em A. Analogamente, o triângulo OBP é retângulo em B, bem como o triângulo OCP é retângulo em C. Assim,



$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$, $\cos\beta = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OP}}$ e $\cos\gamma = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OP}}$.

Como $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$, temos que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$

$$= \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}\right)^2 = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2}{\overline{OP}^2} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP}^2} = 1.$$

b) se $\alpha = \beta = 60^\circ$ temos $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{1}{2}$. Logo $\cos^2\gamma = \dfrac{1}{2}$ e, portanto, $\gamma = 60^\circ$.

13.11. Como MN é perpendicular a NB, pelo Teorema 6.11, $\overline{MB} = \sqrt{b^2 + c^2}$. Como s é ortogonal a r, o pl(A,M,N) é perpendicular ao pl(M,N,B), pois r é perpendicular ao pl(M,N,B) e s é perpendicular ao pl(M,N,A). Assim, MB é perpendicular a r. Logo, pelo Teorema 6.11, (Teorema de Pitágoras), $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

13.12. Consideremos os diedros adjacentes e suplementares di(r,A,B) e di(r,B,C) cujas medidas dos ângulos diedros são θ e φ, respectivamente. Seja $\Pi_{r,D}$ o semiplano bissetor de di(r,A,B) e $\Pi_{r,E}$ o semiplano bissetor de di(r,B,C). Então, por definição, m(di(r,A,D)) = m(di(r,D,B)) = $\frac{\theta}{2}$ e m(di(r,B,E)) = m(di(r,E,C)) = $\frac{\varphi}{2}$. Logo, a medida do ângulo diedro di(r,D,E) é $\frac{\theta}{2} + \frac{\varphi}{2}$. Como os diedros di(r,A,B) e di(r,B,C) são suplementares temos que $\theta + \varphi = 180^0$, logo $\frac{\theta}{2} + \frac{\varphi}{2} = 90^o$, como queríamos demonstrar.

13.13. Seja d(r,A,B) e consideremos uma seção normal qualquer do diedro. Construa a bissetriz da seção normal e considere o semiplano dado por um ponto C da bissetriz que não está em r e a reta r. Logo, por definição de ângulo diedro, teremos que m(di(r,B,C)) = m(di(r,A,C)).

13.14. Consideremos os diedros opostos pela aresta r, di(r,A,B) e di(r,A',B'). Como os diedros são opostos pela aresta então suas secções normais são ângulos opostos pelo vértice que pela Proposição 3.20 são congruentes. Portanto, pela Definição 13.20, temos o desejado.

13.15. Para que existam triedros é necessário e suficiente que:
(i) Qualquer face possui ângulo com medida menor que a soma das medidas dos ângulos das outras duas.
(ii) A soma das medidas dos ângulos das três faces deve ser menor que 2π.

a) Existe, pois $45^o + 55^o = 100^o > 90^o$, $45^o + 90^o = 135^o > 55^o$,
$55^o + 90^o = 145^o > 45^o$ e, além disso, $45^o + 55^o + 90^o = 190^o < 2\pi$.

b) Existe, pois $90^o + 90^o = 180^o > 90^o$ e $90^o + 90^o + 90^0 = 270 < 2\pi$.

c) Não existe, pois $90^o + 80^o = 170^o < 210^o$, não satisfazendo o item (i).

d) Não existe, pois $1^o + 2^o = 3^o$, não satisfazendo assim o item (i).

13.16. Sejam f_1, f_2 e f_3 as medidas dos ângulos das faces de um triedro, como $f_1 \equiv f_2 \equiv f_3$, temos pelo Teorema 13.24 que $f_1 + f_2 + f_3 < 2\pi$, ou seja, $f_1 < \dfrac{2\pi}{3}$. Logo, as medidas dos ângulos das faces podem estar compreendidas entre 0 e $\dfrac{2\pi}{3}$.

13.17. Como r, s e t se interceptam em V, temos seis semi-retas determinadas pelas retas r, s e t com origem em V. Como a cada duas retas que tomarmos temos 4 semi-retas que não determina nenhum triedro, temos então que o número de triedros é:

$$C_6^3 - C_3^2.C_4^3 = \frac{6!}{3!3!} - \frac{3!}{2!1!} = \frac{6.5.4.3!}{6.3!} - \frac{3.2!}{2!}.\frac{4.3!}{3!} = 20 - 3.4 = 8.$$

Logo, são determinados 8 triedros. Mais explicitamente, se considerarmos as semi-retas opostas em r dadas por $S_{V,A}$ e $S_{V,A'}$, as semi-retas opostas em s dadas por $S_{V,B}$ e $S_{V,B'}$, as semi-retas opostas em t dadas por $S_{V,C}$ e $S_{V,C'}$ obtemos as seguintes possibilidades: V(A,B,C), V(A,B',C), V(A,B,C'), V(A,B',C'), V(A',B',C'), V(A',B',C), V(A',B,C'), e V(A',B,C),

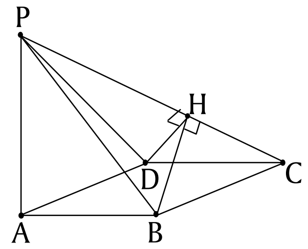
13.18. Sabemos que a soma das medidas dos ângulos da faces de um tridro qualquer é menor que 2π radianos que é igual a 360^o, portanto devemos ter $x+ (x + 10) +)(x + 50) < 360^o$. Assim, $3x < 300^o$ e, então, $x < 100^o$. Portanto para que x, x + 10 e x + 50 sejam medidas em graus das faces de um triedro, devemos ter $x < 100$.

13.19. Consideremos o plano Π perpendicular à aresta VA em A. Este plano determina em VB um ponto B' e em VC um ponto C'. Sejam AH_A, $B'H_B$ e $C'H_C$ as alturas do triângulo AB'C' e H o ortocentro do triângulo. Como VA é perpendicular a Π, temos que B'C' é ortogonal a VA. Além disso, AH_A é perpendicular a B'C' por construção, então pelo Teorema 12.5, $pl(V,A,H_A)$ é perpendicular a B'C'. Assim, pelo Teorema 12.8, $pl(V,A,H_A)$ é perpendicular ao plano pl(VB,VC). Analogamente, temos que:

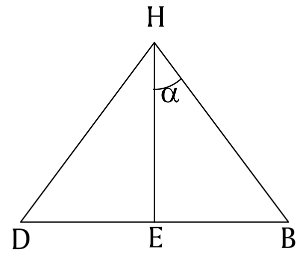
- pl(V,B,H_B) é perpendicular ao plano pl(VA,VC) e
- pl(V,C,H_C) é perpendicular ao plano pl(VA,VB).

Os planos pl(V,A,H_A), pl(V,B,H_B) e pl(V,C,H_C) são os planos do enunciado e têm a reta VH em comum.

13.20. Seja Π o plano do quadrado ABCD, como AP é perpendicular a Π, o triângulo APC é retângulo em A. Temos por hipótese que a medida de AP é 1, assim pelo teorema de Pitágoras que a medida de AC é $\sqrt{2}$ e a medida de PC é $\sqrt{3}$. Usando novamente a hipótese que AP é perpendicular a Π, temos



que BC é perpendicular ao plano pl(ABP) e assim, o triângulo PBC é retângulo em B. Analogamente PDC é retângulo em D. Pelo caso LLL, PBC e PDC são congruentes, e assim suas alturas em relação a base PC são congruentes e coincidem num ponto H.No triângulo retângulo PBC temos, $\operatorname{sen} C = \frac{\overline{PB}}{PC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ e no triângulo CHB temos, $\operatorname{sen} C = \frac{\overline{HB}}{BC} = \overline{HB}$, assim, HB mede $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Queremos a medida do diedro di(PC,B,D), ou seja, devemos tomar uma seção normal deste diedro e calcular o ângulo desta seção. Como BH e DH são perpendiculares a PC, o plano pl(BHD) é normal ao diedro. Assim, a medida do diedro é a medida do ângulo $B\widehat{H}D$. O triângulo BHD é isósceles, pois como vimos acima, BH $\equiv$ DH e assim, m($B\widehat{H}D$) = 2 α. Mas, num triângulo isósceles a altura relativa a base é também mediana, logo E é ponto médio de BD e assim, mede $\frac{\sqrt{2}}{2}$, assim:

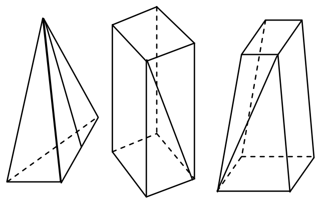


$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\alpha = 60^o$ e $m(B\hat{H}D) = 120^o$.

Capítulo 14

14.1. Basta tomar nos poliedros dois polígonos numa face.



14.2. Sabemos que um tetraedro possui 4 vértices. Assim, pelo Corolário 14.7, temos $S_f = (4 - 2).360° = 720°$.

14.3. Pela demonstração do Teorema 14.9, sabemos que $2.A = n.F$. Logo, $2.A = 3.12$ implica $A = 18$. Assim, pelo Teorema 14.5, $V - A + F = 2$, ou seja, $V - 18 + 12 = 2$. Portanto, o número de vértices é 8.

14.4. Pelo Teorema 14.5, temos $V - A + F = 2$. Cada face triangular possui 3 arestas, cada face quadrangular possui 4 arestas, cada face pentagonal possui 5 arestas e cada face hexagonal possui 6 arestas. Logo, temos $3 + 1 + 1 + 2 = 7$ faces e

$$3.3+1.4+1.5+2.6 = 9+4+5+12 = 30$$

que é o dobro do número de arestas. Assim, temos $V-15+7 = 2$, o que implica que $V = 10$.

14.5. Sabemos que o número de faces é 14. Logo, $2A = 6.4 + 8.3$ o que implica que $2.A = 48$, ou seja, $A = 24$. Consequentemente, temos que $V = 2 + A - F$, ou seja, $V = 2 + 24 - 14 = 12$.

14.6. De imediato temos que o número de faces é 10. Logo, $2A=4.3+6.6$ e, pelo Teorema 14.5, $V = 2 + 24 - 10 = 16$.

14.7. Pelo Corolário 14.7, $S_f = (V - 2).360°$. Como $S_f = 5040°$ temos $5040° = (V - 2).360°$. Logo, $V - 2 = 14$, ou seja, $V = 16$. Assim a pirâmide, possui 16 faces e 30 arestas sendo 15 arestas laterais e 15 arestas da base, que é pentadecagonal.

14.8. Pelo Corolário 14.7, $S_f = (V - 2).360°$. Como $S_f = 2880°$, temos $2880° = (V - 2).360°$. Logo, $V-2=8$, ou seja, $V=10$. Pelo Teorema 14.5, $10-15+F=2$, logo $F = 7$. Temos $2.A = n.F$. Assim, $2.15 = 4.x + 5.y$, onde x é o número de faces quadrangulares e y é o número de faces pentagonais. Como $F = 7$ temos $x + y = 7$ e, portanto, $4.x + 5.y = 30$ e $x + y = 7$ implica $x = 5$ e $y = 2$. Logo, temos 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais.

14.9. Sabemos que o poliedro regular de faces pentagonais, possui 30 arestas, 12 faces e 20 vértices. Como foram retiradas 3 faces temos que o número de faces restantes é 9. Como o número de arestas era 30 e foram retiradas 3 arestas o número restante é 27 arestas e como o número de vértices é 20 e retiramos 1 vértice, o número restante é 19.

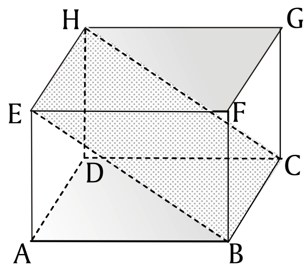
14.10. Na construção do octaedro regular temos o quadrilátero DECF. Como, por construção EF é perpendicular a CD pelo ponto médio, temos que CEDF é um paralelogramo e assim ED // CF e EC // DF. Logo, pelo Teorema 11.6, pl(BDE) // pl(ACF) e pl(ACE) // pl(BDF). Utilizando o quadrilátero AEBF, mostra-se de maneira análoga que pl(CBE) // pl(ADF) e pl(ADE) // pl(BDF).

14.11. Observamos que, quando nos referimos às diagonais de um prisma, não levamos em consideração, as diagonais das bases e das faces laterais do prisma. Seja então, um prisma cuja base é um polígono convexo de n lados. Unindo-se um vértice de uma das bases aos vértices da outra base temos $(n - 3)$ diagonais (eliminamos 2 diagonais da face e uma aresta). Como existem n vértices na base tomada, o número total de diagonais do prisma é $n.(n - 3)$.

14.12. Sabemos que um diedro está determinado por duas faces e a soma dos ângulos das faces de um prisma é, pelo Corolário 14.7, $(V - 2).2\pi$. Então, a soma dos diedros será $\left[\frac{1}{2}(V-2)\right].2.\pi$. Como um prisma possui 2n vértices temos $S_d = \left[\frac{1}{2}(2n-2)\right].2.\pi = \left[\frac{2}{2}(n-1)\right].2.\pi = (n-1).2.\pi$.

14.13. Pelo Exemplo 12.3, sabemos que as faces do prisma são paralelogramos. Pelo Exemplo 13.3, temos que as arestas são perpendiculares a base. Logo, as faces são retangulares.

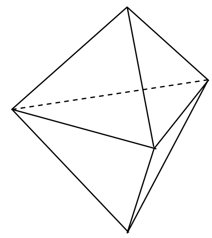
14.14. Sabemos que em um paralelepípedo, arestas opostas são paralelas. Assim consideremos o pl(EH,BC). A figura formada pelos vértices BCHE é um paralelogramo. Consideremos as diagonais do paralelepípedo EC e BH, como EC e BH são diagonais do paralelogramo BEHG, temos pela Proposição 5.10 que EC e BH se interceptam nos pontos médios. Tomando agora o paralelogramo ADFG e utilizando o mesmo raciocínio obteremos que AG e DF se interceptam nos seus respectivos pontos médios. Mas ABGH também é um paralelogramo, e concluímos que AG e BH se interceptam nos seus respectivos pontos médios. Comparando as três conclusões, temos que as diagonais do paralelepípedo também se interceptam nos respectivos pontos médios.



14.15. Se o poliedro convexo possui 11 faces e 18 arestas então, pelo Teorema 14.5, temos V – 18 + 11 = 2, ou seja, V = 9. Assim, pelo Corolário 14.7, temos $S_f = (9 - 2).360° = 2520°$.

14.16. Pelo Corolário 14.7, $S_f = (V - 2).360°$. Como S=5760°, temos 5760° =(V – 2).360°, logo V=18. Pelo Teorema 14.5, 18 – 28 + F = 2. Temos que 2.A = n.F. Assim, 2.28 = 3x+ 5y, onde x é o número de faces triângulares e y é o número de faces pentagonais. Como F=12, então x+y=12. Portanto, 3x + 5y = 56 e x + y = 12 implica x = 2 e y = 10. Logo, temos 2 faces triângulares e 10 faces pentagonais.

14.17. a) Falso, pelo Teorema 14.9, existem cinco tipos de poliedros de Platão.
b) Falsa, veja desenho ao lado.
c) Falsa, pois os poliedros de Platão as arestas não precisam ser congruentes.
d) Falsa, basta considerar o cubo que é um hexaedro de faces quadradas.



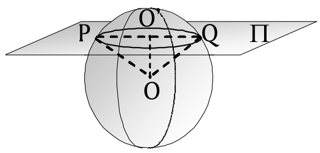
14.18. Pelo Corolário 14.7, 720 = (V – 2).360º, ou seja, V = 4. Como, por hipótese, $A = 3\frac{F}{2}$, pelo Teorema 14.5, $4 - 3\frac{F}{2} + F = 2$, ou seja, F=4.

14.19. Como o poliedro é convexo, pelo Teorema 14.5 (Teorema de Euler), A + 2 = F + V. Supondo que exista tal poliedro o número de arestas A é par (já que cada face possui, por hipótese, um número par de lados), o número de faces, por hipótese, é par e o número de vértices, por hipótese, é ímpar. Assim, teremos do lado esquerdo da igualdade um número par e do lado direito um número ímpar, o que é um absurdo. Logo, este poliedro convexo não existe.

14.20. Como o poliedro é convexo teremos, pelo Teorema 14.5, que A + 2 = F + V. Como V = F, teremos que 2F = A + 2, ou seja, $F = \frac{A+2}{2}$. Se o número de arestas for ímpar, não é possível obter o número de faces inteira.

Capítulo 15

15.1. Deve-se mostrar que a interseção do plano Π que determina a seção e a superfície esférica S é uma circunferência. Mas se é uma seção, o plano Π dista de O menos que o raio de S. Logo, o resultado segue imediatamente do Teorema 15.5.



15.2. Seja S uma esfera de centro O e raio R. Como o centro da esfera pertence aos dois planos Π_1 e Π_2 que contém os dois círculos máximos dados, temos que a reta interseção destes dois planos é um diâmetro da esfera. Considere o plano Π perpendicular a este diâmetro passando pelo centro da esfera. Este plano Π determina um círculo máximo, bastando considerar três pontos do plano que distam R do ponto O. Este é o círculo máximo requerido, pois existe uma reta em Π_1 e Π_2 perpendicular a Π.

15.3. De fato, se existe um ponto X distinto de A pertencente a reta r, então X pertence ao plano Π. Como Π é tangente à S, temos $\overline{XO} > R$ e, como $\overline{OA} = R$, temos que r é tangente à S.

15.4. Sejam Λ_1 e Λ_2 dois planos quaisquer do feixe de planos que contém o raio OA. Como $A \in \Pi$, $A \in \Lambda_1$ e $A \in \Lambda_2$, temos que $\Pi \cap \Lambda_1 = r_1$ e $\Pi \cap \Lambda_2 = r_2$. Além disso, pelo Teorema 15.5, $\Lambda_1 \cap S = C_1$ e $\Lambda_2 \cap S = C_2$, onde C_1 e C_2 são circunferências máximas. Como $r_1, r_2 \in \Pi$ temos, pelo Exercício 15.3, que r_1 e r_2 são tangentes a S em A, e assim tangentes a C_1 e a C_2 em A. Pela Proposição 8.8, temos que AO é perpendicular a r_1 e r_2. Como r_1 e r_2 são concorrentes em A por construção temos, pelo Teorema 12.5, que OA é perpendicular a Π.

15.5. Seja Π um plano tangente à S no ponto A dado. Como num plano passam infinitas retas por um ponto temos, pelo Exercício 15.3, o resultado desejado.

15.6. a) Foi visto na demonstração do Teorema 15.3 que o centro O da superfície esférica circunscrita é a interseção das alturas e que as distâncias dos vértices a O é igual a $\frac{3}{4}$H, onde H é a altura do tetraedro e o segmento que liga o vértice ao circuncentro da face oposta. Temos que o circuncentro de uma face dista do vértice x = $\frac{2}{3}$h, onde h é a altura da face. Assim $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = 3\frac{a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Portanto, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ e $H^2 = a^2 - x^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$. Portanto $H = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Assim $R = \frac{3}{4}$ e $H = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

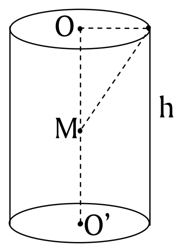
b) A distância do centro da esfera inscrita até o ponto de tangência K é $\frac{1}{4}$H, logo $r = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{16}a$.

15.7. a) Já foi demonstrado que que as diagonais do cubo se interceptam num único ponto O e este ponto é eqüidistante de todos os vértices do cubo, assim O é o centro da superfície esférica. A medida do raio é a metade da medida da diagonal que é $a\sqrt{3}$.

b) Os segmentos que unem os centros das faces do cubo se interceptam um único ponto que é o centro da superfície esférica inscrita e, portanto, o raio será a metade do lado.

15.8. A interseção O das diagonais, pela definição de octaedro regular, dista dos vértices $a\frac{\sqrt{2}}{2}$, onde a é a medida das arestas do octaedro. Assim, S tem centro O e raio $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Consideremos uma face AEB do octaedro regular. Temos que ABE é um triângulo eqüilátero e o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam dos vértices A, B e E é uma reta que passa pelo seu circuncentro P e é perpendicular ao plano pl (ABE). Como O eqüidista de A, B e E, temos que O está nesta reta e assim o ponto de interseção de S' com ABE é o circuncentro do triângulo ABE. Analogamente, obtém-se o mesmo resultado para as outras faces do octaedro. Logo, O também é o centro de S' e o raio de S' tem medida OP. Além disso, o triangulo EOP é retângulo em P, com $\overline{OE} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{EP} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e assim $\overline{OP}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{EP}^2 = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^2}{6}$. Portanto, $\overline{OP} = a\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

15.9. a) Seja C um cilindro reto qualquer e sejam O e O' os centros das bases de raio R. seja M o ponto médio do segmento OO'. Considere P um ponto qualquer da circunferência da base com centro O ou O'. O triangulo OPM é retângulo em O, pois o cilindro é reto, e assim $\overline{PM}^2 = \dfrac{\overline{OO'}}{2} + R^2$.



Como P foi tomado arbitrariamente nas circunferências das bases, a esfera com centro M e raio com medida $\overline{PM}$ é circunscrita a C.

b) ($\Rightarrow$) Se um cilindro está circunscrito a uma esfera, temos que os planos da base, por definição, são tangentes a esfera. Como o cilindro é reto, a reta pelo centro da esfera perpendicular as bases passa pelos centros O e O' dos círculos das bases e assim os pontos de tangencias são exatamente O e O'. A distância de O a O' é 2R, logo a altura do cilindro é 2R.

($\Leftarrow$) Suponhamos que a altura de um cilindro reto C é 2R, onde R é o raio da base. Sejam O e O' os centros dos círculos da base e seja M o ponto médio do segmento OO'. Consideremos a esfera S com centro M e raio com medida $\overline{OM} = R$. Pelo Teorema 15.8, temos O e O' são pontos do tangência da superfície esférica S com os planos das bases do cilindro C. Assim, S é tangente as bases do cilindro. Além disso, como o raio das bases é R, por hipótese, temos que as geratrizes tangenciam a esfera que tem raio R e a interseção da esfera com o plano perpendicular a OO' pelo centro do cilindro, pois o cilindro é reto.

15.10. a) Dado qualquer cone reto é possível circunscrever uma esfera. De fato, seja EF um diâmetro qualquer da base B do cone e consideremos o plano pl(EFV). Seja C o circuncentro do triângulo EFV e r a distância de C a V. O cone está inscrito na esfera S de centro C e raio r.

b) Dado qualquer cone reto é possível inscrever uma esfera. De fato, seja EF um diâmetro qualquer da base B do cone e consideremos o plano pl(EFV). Seja C o incentro do triângulo EFV e r a distância de C ao centro de B. O cone está circunscrito na esfera S de centro C e raio r.

15.11. Seja S a esfera de centro O e raio R. Sejam A e B os pontos de interseção da corda com a esfera. Como a esfera é o lugar geométrico dos pontos que distam R de O, consideremos no plano pl(AOB), a circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$ = R. Como B $\in$ S, a circunferência passa por B. Assim, da Geometria Plana, $\overline{OM}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Onde M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Com raciocínio análogo, recaímos na Geometria Plana e assim temos que a recíproca é verdadeira.

15.12. Sejam A e B dois pontos da esfera S (interiores ou não). Consideremos a reta r dada por A e B. Pelo parágrafo que estuda posições entre retas e esferas, temos que r intercepta a superfície esférica de S em dois pontos que denominaremos E e F. Consideremos a corda EF, pelo exercício anterior, a reta que passa pelo centro da esfera intercepta a corda EF perpendicularmente no seu ponto médio M. Temos que se X estiver na semi-reta $S_{M,E}$, então $\overline{MA} < \overline{ME}$ (1). Assim, considerando os triângulos retângulos OAM e OEM, temos que $\overline{OA} < \overline{OE}$, por serem hipotenusas de triângulos, por (1) e pelo fato do outro cateto OM ser comum. Analogamente para a semi-reta $S_{M,F}$. Assim, para todo X entre E e F (inclusive E e F) temos que $\overline{OX} < \overline{OE}$ = R. Logo todos os pontos entre A e B são interiores a S. Assim S é convexo.

15.13. Sejam AB e CD diâmetros de uma superfície esférica de centro O e raio R. Como AB e CD são concorrentes em O eles determinam um plano Π cuja interseção com a esfera é uma circunferência C de centro O e raio R. Os pontos A, B, C e D pertencem a C e formam um quadrilátero plano ACBD. Como as diagonais AB e CD são congruentes (diâmetro da superfície esférica) e interceptam no ponto O, pelo item c) da Proposição 5.14, temos que os pontos A, B, C e D formam um retângulo.

15.14. Por definição, uma circunferência máxima é a interseção de um plano que passa pelo centro de uma esfera S com a superfície da esfera S. Assim, para se ter duas circunferências máximas, devemos ter dois planos $\prod_1$ e $\prod_2$ passando pelo centro de S, logo, dois planos que se interceptam no centro de S e assim numa reta $r = \prod_1 \cap \prod_2$. Pelo parágrafo que estuda as posições relativas entre reta e esfera, temos que r intercepta S em dois pontos A e B. Assim $A, B \in r = \prod_1 \cap \prod_2 \cap S$, logo $A, B \in \prod_1 \cap S$ e $A, B \in \prod_2 \cap S$ que são circunferências máximas.

15.15. (1º. Modo) Dados uma circunferência C e um ponto P que não pertença ao plano que contém a circunferência, tome três pontos X, Y e Z quaisquer em C, pelo **Erro! A origem da referência não foi encontrada.** existe uma única superfície esférica que contém estes quatro pontos. A interseção da superfície com o plano que contém X, Y e Z é uma circunferênia, pelo Exercício **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**. Pelo **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**, a circunferência que contém X, Y e Z é única, logo C é esta interseção. Assim, a superfície esférica contém C e P.

(2º. Modo) Sejam Π o plano que contém C e O o centro de C. Considere a única reta **r** perpendicular a Π por O (Teorema 12.6.b)

1º Caso: Se $P \in r$, seja A um ponto qualquer de C. Traçando a mediatriz de PA no plano pl (A O P), temos que PA intercepta **r**, digamos em Q (**r** e a reta PA são concorrentes em P, assim a mediatriz do segmento PA intercepta **r**). Seja $R = \overline{PQ} = \overline{QA}$ (pois Q é um ponto de mediatriz). Considere a esfera S de centro Q e raio R. Se $X \in C$, então $\overline{XO} = \overline{OA} = R$. assim os triângulos AOQ e XOQ são congruentes pelo caso LAL. Portanto, $\overline{QX} = \overline{QA} = R$. Disso segue que $C \in S$. como $\overline{PQ} = R$, temos o desejado.

2º Caso: Se $P \notin r$, consideramos o plano pl $(r, P) = \Lambda$ que encontra C em dois pontos A e B. Considere a mediatriz de AP, que encontra r em Q.

Como Q pertence a mediatriz de AP, temos que $\overline{PQ} = \overline{QA}$ e assim tomamos a esfera S de centro Q e raio $\overline{QA}$ = R. Tomando X $\in$ S, temos como no 1º caso ou X $\in$ S e, portanto S é a esfera desejada.

15.16. Pelos exercícios 15.3 e 15.4, a reta r que passa pelo ponto de tangência é perpendicular ao plano de tangência que passa pelo centro O da superfície esférica e a reta que passa pelo centro de C e é perpendicular ao plano de C também passa por O. Assim, marcando essas duas perpendiculares obtemos o centro O da esfera. Como temos um ponto P de tangência, a esfera desejada tem centro O e raio $\overline{OP}$.

15.17. Seja $\prod$ o plano pl(A, B, D). Assim pelo Teorema 15.5, $\prod \cap$ S é uma circunferência C. Como A, B, D $\in$ S e A, B, D $\in \prod$, temos que A, B, D $\in$ S $\cap \prod$ = C. Mas por três pontos não colineares passa uma única circunferência. Logo, C está contida em S.

15.18. Sejam h = $\sqrt{R^2 - r^2}$ e x a distancia de P a O. Consideremos a esfera S' de centro O e raio h e Q um ponto de S' tal que a distância de P a Q seja $\sqrt{R^2 - r^2}$. Como, por construção,

$$\overline{OP}^2 = x^2 = h^2 + (x^2 - h^2) = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2,$$

temos pela recíproca do Teorema de Pitágoras que OPQ é um triangulo retângulo e assim OQ é perpendicular a PQ. Considere a plano $\prod$, perpendicular a OQ por Q. Pela observação anterior P pertence a $\prod$. Como h < R, pelo Teorema 15.5, $\prod \cap$ S = C, sendo Q o centro de C. Por construção, $\overline{OQ} = h = \sqrt{R^2 - r^2}$, ou seja, o raio de C é r.

15.19. Seja P um ponto exterior à uma esfera S de centro O e raio R. Seja A um ponto com propriedade $\wp$, ou seja, r_{PA} é uma reta tangente à S em A. Assim, r_{PA} está contida no plano tangente a S em A (Exercício 15.4). Logo, o raio $\overline{OA}$ é perpendicular a PA, pelo Exercício 15.4. Como $\overline{OA}$ é constante e igual a R para todos os pontos com propriedade $\wp$, então $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2$ e assim todos os pontos X com a propriedade $\wp$ satisfaz $\overline{XP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - R^2}$. Considere a esfera S' com centro P e raio $\overline{AP}$. Como A $\in$ S temos, pelo Teorema 15.9, que S $\cap$S' é uma circunferência C. Afirmamos que C é o lugar geométrico dos pontos com a propriedade $\wp$. De fato, por construção, todos os pontos X de C estão em S', portanto a distância de um ponto X de C ate P será $\sqrt{\overline{OP}^2 - R^2}$ e assim X pertence a reta tangente a esfera.

15.20. Pelo Exercício 15.4, a reta s está contida no plano tangente a esfera S que desejamos construir. Pelo Exercício 15.4, o raio da esfera é perpendicular a S.

1º Caso: Se r e s são colineares, basta traçar pelo ponto P dado, a reta t perpendicular a **s**.

1) Se $P \neq r \cap s$ e $r \cap s = Q$, então seja $P' = r \cap t$. Consideramos a esfera de centro P' e raio $\overline{PP'}$.

2) Se $P = r \cap s$, então qualquer esfera de centro **Q ≠ P em t** e raio $\overline{QP}$ satisfaz as condições.

2º Caso: Se r e s são reversas. Neste caso, considerando o plano Π perpendicular a s por P.

1) Se Π for paralelo a r não existe solução, pois por nenhum ponto de r teremos uma perpendicular a s por P, já que em Π estão todas as retas com esta propriedade.

2) Se Π é secante a r em Q. Tomamos a esfera S com centro em Q e raio $\overline{QP}$.

Capítulo 16

16.1. Pelo item a) do Exercício 15.7.a, temos que o raio da esfera $R = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}$, onde a é a aresta do cubo, logo a aresta do cubo mede $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$. Pelo Axioma III.11, o volume do cubo mede a^3, assim $V = \frac{8}{9}\sqrt{3}\ R^3$.

16.2. Pelo Exercício 15.6.b, a aresta do cubo circunscrito mede a = 2R, onde R é o raio da esfera . Assim pelo Axioma III.11, $V = 8R^3$.

16.3. Pelo Exercício 15.6.a, a aresta do tetraedro inscrito numa superfície esférica de raio R mede $a = \frac{2}{3}\sqrt{6}\ R$. Utilizando o Teorema 16.7, temos que o volume de uma pirâmide mede um terço do produto da área da base pela altura da pirâmide. Pelo Exemplo 13.6, a altura H de um tetraedro regular mede $H = \frac{\sqrt{6}\,a}{3}$ e a área de um triângulo eqüilátero de lado a, mede $A = \frac{ah}{2}$, onde $h^2 = \frac{3a^2}{4}$, ou seja, $A = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$.

Assim, $V = \frac{1}{3}\ A\ .\ H = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}R\right)^2\right].\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}R\right)\right] = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.

16.4. Pelo Exercício 15.6.b, a aresta de um tetraedro circunscrito a uma superfície esférica de raio R, mede $a = 2\sqrt{6}\ R$. Assim, utilizando os resultados do Exercício 16.3, temos:

$$V = \frac{1}{3}\ A\ .\ H = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{6}R\right)^2\right].\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\left(2\sqrt{6}R\right)\right] = 8\sqrt{3}R^3.$$

16.5. Pelo Exercício 15.7, temos que a aresta de um octaedro inscrito numa esfera de raio R, mede a = $\sqrt{2}$ R. O volume do octaedro é o dobro do volume da pirâmide quadrangular V_P. Neste caso, a pirâmide tem como base um quadrado de lado a e altura igual ao raio R. Assim,

$$V = 2\,V_P = 2\,.\,\frac{1}{3}\,a^2\,.\,R = \frac{2}{3}\,(\sqrt{2}\,R)^2\,.\,R = \frac{4}{3}\,R^3.$$

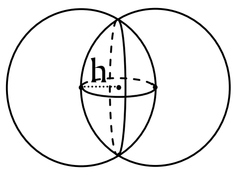
16.6. Pelo Exercício 15.7, temos que a aresta de um octaedro circunscrito a uma esfera de raio R mede a = $\sqrt{6}$ R, assim, utilizando os mesmos resultados do Exercício 16.5, e lembrando que neste caso,

$$H^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{6}R\right)^2 = \frac{11}{2}R^2 \Rightarrow H = R \text{ e}$$

assim,

$$V = 2\,V_P = 2\,\frac{1}{3}\,(\sqrt{6}R)^2.\,\frac{\sqrt{22}}{11}\,R = \frac{4\sqrt{22}}{11}R^3\,.$$

16.7. Queremos o volume de dois setores esféricos com altura h = $\frac{R}{2}$, assim, pelo Teorema 16.7. b, temos



$$V = 2.\frac{\pi}{6}.\frac{R}{2}.\left[3R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = \frac{13}{24}R^3\,.$$

Como R = 10 cm temos V = $\frac{13}{24}1000 = \frac{1625}{3}$ cm^3.

16.8. Se o comprimento da circunferência máxima mede 20 cm, o raio da esfera mede $\frac{10}{\pi}$ cm. Assim, segue do Teorema 16.19, que a área da superfície esférica é

$$A = 4\pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 = \frac{400}{\pi}\ \text{cm}^2.$$

16.9. Pelo item b) do Exercício 15.9, a altura do cilindro circunscrito é igual a 2R, onde R é o raio da esfera e da base do cilindro. Assim, pela Proposição 16.10, a área lateral do cilindro circunscrito é igual a $2\pi R(2R) = 4\pi R^2$, que pelo Teorema 16.19 é a área da superfície esférica de raio R, que mede quatro vezes a área do círculo máximo (πR^2).

16.10. Sejam dois paralelepípedos retângulos P_1 e P_2, com arestas a_1, b_1 e c_1 e a_2, b_2 e c_2, respectivamente. Por hipótese,

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 \qquad (1)$$

Pelo Exemplo 13.1, temos que as diagonais de P_1 e P_2 medem respectivamente,

$$d_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \qquad (2)$$

Elevando-se ambos os membros de (1) ao quadrado obtemos,

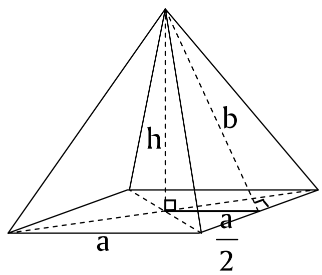
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2(a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + 2(a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2) \qquad (3)$$

Mas por hipótese, $d_1 = d_2$, assim, de (2),

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \qquad (4)$$

De (4) em (3), temos que $a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 = a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2$ e, como temos pela Definição 16.1 que as áreas totais de P_1 e P_2 que medem, $2a_1b_1 + 2a_1c_1 + 2b_1c_1$ e $2a_2b_2 + 2a_2c_2 + 2b_2c_2$, respectivamente, segue o resultado.

16.11. Consideremos uma pirâmide regular de altura h dada. Seja a a aresta da base e b a altura da face lateral. Temos que,



$$b^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \qquad (1)$$

Por hipótese, $4\left(\frac{ab}{2}\right) = a^2 + \frac{3}{2}h^2$, logo

$$2ab = a^2 + \frac{3}{2}h^2 \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos,

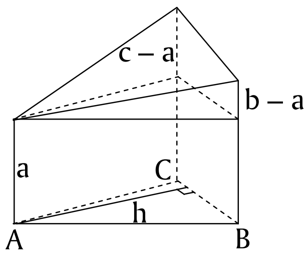
$a\sqrt{4h^2 + a^2} = a^2 + \frac{3}{2}h^2$, ou seja, $2a\sqrt{4h^2 + a^2} = 2a^2 + 3h^2$.

Elevando-se ao quadrado ambos os membros desta equação obtemos,

$$4a^2(4h^2 + a^2) = 4a^4 + 12h^2a^2 + 9h^4 \Rightarrow a = \frac{3}{2}h .$$

16.12. Suponhamos sem perda de generalidade que $a \le b \le c$.

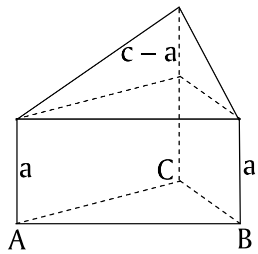
1º Caso: $a < b \le c$. Neste caso, o volume (V) desejado é igual ao volume do prisma (V_P), de base triangular (ABC, na figura) com área x e altura a, mais o volume da pirâmide (V_T) que tem como base um trapézio reto (de bases (c – a) e (b – a) e altura $\overline{BC}$) e altura h, onde h é a altura do



triângulo ABC, em relação a base BC, ou seja, $\overline{BC}$. h = x. Apenas como observação, no caso b = c, teremos um retângulo, mas a solução a seguir não se modifica. Temos $V_P = x\,.a$ e $V_T = \frac{1}{3}[(c–a) + (b – a)].\overline{BC}\,.h$.

Assim, $V = V_P + V_T = x.a + \frac{1}{3}(c+b).x – \frac{2}{3}x.a$. Logo, $V = \frac{1}{3}x(a+b+c)$.

2º Caso: $a = b < c$. Neste caso, o volume (V) desejado é igual ao volume do prisma (V_P), de base triangular (ABC, na figura) com área x e altura a, mais o volume da pirâmide (V_T) que tem como base um triângulo congruente a ABC e altura (c–a). Temos V_P=x.a e $V_T = \frac{1}{3}(c–a)x$. Assim,



$$V = V_P + V_T = x\,.a + \frac{1}{3}(c – a)\,x = \frac{1}{3}c\,x + \frac{2}{3}a\,x .$$

Como a = b, podemos escrever $V = \frac{1}{3}\,x\,(a + b + c)$.

16.13. O volume do cilindro (V_C), pelo Teorema 16.8, é o produto da área da base pela sua altura. Assim, $V_C = \pi(3{,}7)^2\,(7{,}4)\ cm^3 \cong 318{,}1\ cm^3$. Pelo Teorema 16.6, o volume da esfera (V_S) de raio R mede, $V_S = \frac{4}{3}\pi R^3$, como cada brigadeiro terá 1 cm de raio, teremos $V_S = \frac{4}{3}\pi$ cm$^3 \cong 9{,}42$ cm^3. Assim, n brigadeiros terão 9,42 n como volume. Logo, 318,1 = 9,42 n. Se n fosse um número real qualquer, obteríamos aproximadamente n = 33,77, como n é um número natural, n = 33 e sobra em cada lata aproximadamente 77% de um brigadeiro. Mas queremos agora obter o número de latas necessárias para fazer 180 brigadeiros, assim, utilizamos o número real n = 33,77, ou seja, se *l* é o número de latas, $l \cong \frac{180}{33{,}77} \cong 5{,}33$. Assim, utilize 6 latas, pois você utilizará 5 latas inteiras mais 33% da 6ª lata.

16.14. A base da pirâmide tem área a^2 e a altura terá como medida a aresta do cubo, assim, pelo Teorema 16.7, $V = \frac{1}{3} a^2.a = \frac{1}{3} a^3$.

16.15. a) Pelo Exercício 15.9, para que um cone de altura H seja inscrito numa esfera de raio R é necessário que a distância h do centro O da esfera à base do cone seja $h^2 = R^2 - r^2$, onde r é o raio da base do cone. Então, o raio da base do cone será $r^2 = R^2 - h^2$. Assim, pelo Teorema 16.12, $V = \frac{1}{3} A_B\, H = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)(R + h)$.

b) Para poder circunscrever o cone numa esfera de raio r e centro O, a base do cone, de raio R e centro O', deverá ter R > r. Seja $h = \overline{VO}$ e x a distância de um ponto de tangência lateral A, até o vértice V. Assim,

$$(x + R)^2 = (h + r)^2 + R^2 \qquad (1)$$

$$h^2 = x^2 + r^2 \qquad (2)$$

Segue de (1) que:

$$x^2 + 2xR + R^2 = h^2 + 2h\, r + r^2 + R^2 \qquad (3)$$

Substituindo x em (3), utilizando (2), obtemos

$$h^2 - r^2 + 2\, R\, \sqrt{h^2 - r^2} = h^2 + 2hr + r^2.$$

Portanto, $R\sqrt{h^2 - r^2} = h\, r + r^2$, elevando-se ao quadrado ambos os membros, obtemos $R^2(h^2 - r^2) = h^2r^2 + 2hr^3 + r^4$. Logo,

$$(R^2 - r^2)\, h^2 - 2r^3h - (R^2 + r^2)r^2 = 0$$

portanto, $h = \dfrac{2r^3 \pm \sqrt{4r^6 + 4(R^4 - r^4)r^2}}{2(R^2 - r^2)}$ e, assim, $h = \dfrac{r(r^2 \pm R^2)}{R^2 - r^2}$.

Como h é altura, h é positivo, temos $h = \dfrac{r(R^2 + r^2)}{R^2 - r^2}$ e, utilizando a fórmula do volume de um cone, obtemos $V = \dfrac{1}{3}\pi r R^2 . \dfrac{(R^2 + r^2)}{R^2 - r^2}$.

16.16. a) Vimos no Exercício 15.8.a que todo cilindro reto está inscrito numa esfera. Portanto, para calcular o volume do cilindro inscrito, necessitamos conhecer o cilindro e então basta utilizar o Teorema 16.8.

b) No Exercício 15.8.b, vimos que inscrever uma esfera num cilindro dado, este deve ter altura igual ao dobro do raio da esfera e raio da base igual ao raio da esfera, assim pelo Teorema 16.8, $V=\pi R^2(2R)=2\pi R^3$.

16.17. a) No Exemplo 11.5 vimos que,

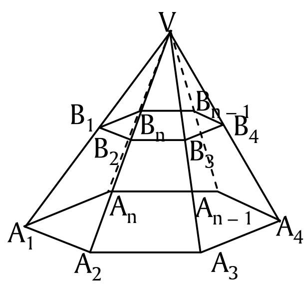
$$\frac{\overline{VB_1}}{\overline{B_1A_1}} = \frac{\overline{VB_2}}{\overline{B_2A_2}} = \ldots = \frac{\overline{VB_n}}{\overline{B_nA_n}} = k,$$

onde k é uma razão de semelhança. Como a pirâmide é regular, $\overline{VB_1} = \overline{VB_2} = \ldots = \overline{VB_n}$ e assim, temos o resultado.

b) Feito no Exemplo 11.5.

c) Segue imediatamente do item a).

d) Possuem bases semelhantes pelo item b), e mesmo vértice e assim, são semelhantes.



e) Seja A_l a área lateral do tronco da pirâmide que é formada por trapézios de bases b e B, com altura d. Assim,

$$A_l = n.\frac{(b+B)}{2}\ d = \frac{(2p'+2p)}{2}.\ d = (p'+p).d.$$

Temos que a área da base maior A_B, é dada por $AB = p\,.\,m$ e a área da base menor, $Ab = p'\,.\,m'$. Logo,

$$A_t = (p + p')\,.\,d + p\,.\,m + p'\,.\,m'.$$

f) Seja h a altura da pirâmide menor, então pelo Exemplo 11.5. Exemplo 11.6 e Exercício 7.11,

$$\frac{h+d}{h} = \sqrt{\frac{b}{b'}} \Rightarrow \frac{h^2+2dh+d^2}{h^2} = \frac{b}{b'} \Rightarrow h = \frac{d(\sqrt{bb'}+b')}{(b-b')} \quad (1)$$

Temos que o volume da pirâmide maior $V_P = \frac{1}{3}b(h + d)$ e volume da pirâmide menor $V_p = \frac{1}{3}b'h$. Assim, o volume do tronco V_T, é dado por $V_T = V_P - V_p$, utilizando (1), obtemos $V_T = \frac{1}{3}d(b + \sqrt{bb'}\ b')$.

16.18. No Exemplo 11.5, vimos que se duas pirâmides $P_1 = VA_1A_2...A_n$ e $P_2 = V'B_1B_2...B_n$ são semelhantes, então $\frac{\overline{V'B_1}}{\overline{VA_1}} = \frac{\overline{V'B_2}}{\overline{VA_2}} = ... = \frac{\overline{V'B_n}}{\overline{VA_n}} = k$, onde k é a razão de semelhança, e além disso, suas bases mantém a mesma razão de semelhança, ou seja, $\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{A_2A_3}} = ... = \frac{\overline{B_nB_1}}{\overline{A_nA_1}} = k$.

a) A área lateral de uma pirâmide é a área da superfície lateral da pirâmide, que é a soma das áreas de todos os triângulos que a compõe. Pelo Teorema 7.11 e a observação acima, os triângulos correspondentes destas pirâmides, são semelhantes. Assim, pelo Exercício 7.18, a razão entre as áreas laterais é o quadrado da razão de semelhança. Para mostrar que a razão entre as áreas da base é o quadrado da razão de semelhança, consideramos o pé da perpendicular pelo vértice nos planos das bases das pirâmides que denominaremos O e O´. Assim, os triângulos $OA_1A_2 \sim O'B_1B_2$, $OA_2A_3 \sim O'B_2B_3$, ... , $OA_nA_1 \sim O'B_nB_1$. Utilizando novamente o Exercício 7.18, concluímos o desejado. Como a área total é a soma da área lateral com a área da base, temos o resultado.

b) Pelo Teorema 16.7, o volume da pirâmide é igual a um terço do produto da área da base e a altura da pirâmide. Assim, se denotarmos as medidas das áreas por $A(P_1)$ e $A(P_2)$, respectivamente e as medidas dos volumes por $V(P_1)$ e $V(P_2)$, teremos:

$$\frac{V(P_1)}{V(P_2)} = \frac{\overline{A(P_1)H_1}}{A(P_2)H_2} = k^2 .\ k = k^3 ,$$

16.19. a) Está resolvido no Exemplo 11.6.

b) Seja h a altura do cone menor C´, assim a altura do cone maior C é igual a h + d. Logo,

$$\frac{h+d}{h} = \frac{R}{r} \Rightarrow hr + dr = h R \Rightarrow h(R - r) = d r \Rightarrow h = \frac{dr}{R - r} \qquad (1)$$

Por outro lado, $V_{C'} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $V_C = \frac{1}{3} \pi R^2 (h + d)$. Portanto,

$$V_T = V_C - V_{C'} = \frac{1}{3} [\pi(R^2 - r^2) + \pi R^2 d] \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$V_T = \frac{1}{3}\pi\left[(R^2 - r^2)\frac{d\ r}{R - r} + R^2 d\right] = \frac{1}{3}\pi\ d\ [R^2 + R\ r + r^2].$$

c) Pela Proposição 16.14, a área lateral de um cone mede πRx, onde R é o raio da base e x é a geratriz do cone. Seja g´ a geratriz do cone menor C´ e assim a geratriz do cone maior C, é (g + g´). Então, a área lateral do tronco:

$$A_{LT} = A_C - A_C = \pi R (g + g') - \pi r g' = \pi R g + \pi g'(R - r) \qquad (1),$$

Mas,

$$\frac{g'+g}{g}{}' = \frac{R}{r} \Rightarrow g' = \frac{g\ r}{R - r} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

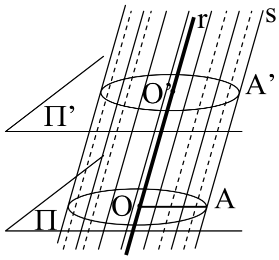
$$A_{LT} = \pi g (R + r)$$

Assim, a área total do tronco A_{TT} é dada por,

$$A_{TT} = A_{LT} + A_B + A_b = \pi g (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi [R(g+R) + r(g+r)].$$

16.20. a) Seja Π´ paralelo à Π. Seja r uma reta por O paralela à geratriz do cilindro. Como r intercepta Π em O, pelo Teorema 11.8, r intercepta Π´ num ponto O´ e analogamente para as geratrizes do cilindro.

Seja A um ponto qualquer de C, e consideremos o plano Λ = pl (OO´A). Pelo Teorema 11.9, Λ intercepta Π´ numa reta x paralela a AO e como a geratriz s por A está em Λ (pois é paralela a r), ela intercepta Π´ num ponto A´ de s. Como AA´OO´ é um paralelogramo $\overline{OA} = \overline{O'A'}$ e como A é um



ponto qualquer de C, a interseção das geratrizes com Π´ nos dá uma circunferência de centro O´e raio $\overline{OA}$, ou seja, congruente a C.

b) $h^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}$.